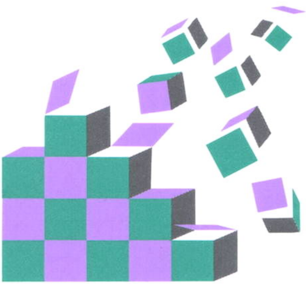
倉田令二朗監修［数学基礎論シリーズ０巻］

数学基礎論へのいざない

倉田令二朗 著



河合文化教育研究所

倉田令二朗監修［数学基礎論シリーズ0巻］

数学基礎論へのいざない

倉田令二朗 著

河合文化教育研究所

目　次

数学基礎論へのいざない

倉田令二朗

はじめに

1° 数学基礎論とはなにか

数学基礎論は大まかにいって次の分野に分かれる．

（1） 証明論

（2） モデルの理論

（3） 帰納的関数の理論

（4） 公理論的集合論

証明論とは「証明」自身を研究対象とする部門であって，各種の形式的公理系の無矛盾性の証明を主な目標とする．

モデルの理論は形式的公理系の解釈に関する議論である．

帰納的関数の理論は，計算可能関数とは何かに答える理論である．

公理論的集合論は集合論を形式的公理系として研究する分野である．

これらは何故，いかにして成立したか．これを明らかにすることが第1の課題である．

2° 古典としての数学基礎論の成立．主な成果

数学基礎論が古典として成立したのは大体今世紀半ば，1950年までにおいてである．その間の主たる成果は

（1） Post（1921）．命題論理の公理系の研究．Soundness Theorem（健全性定理）と Completeness Theorem（完全性定理）の証明．

（2） Löwenheim（レーヴェンハイム 1915）-Skolem（スコーレム 1920）の定理——公理系 T にモデルがあれば可算モデルがある．

（3） Gödel（ゲーデル 1930）．述語論理の完全性定理．

命題 A が恒真 $\Longrightarrow \vdash A$（A が述語論理で証明可能）

公理系 T が無矛盾 $\Longrightarrow$ T のモデルがある

に一般化される.

（4） 帰納的関数の理論.

原始帰納的関数の理論（ゲーデル 1931. 不完全性定理のために展開).

一般帰納的関数の理論. Church(チャーチ), Kleene(クリーニ)1936-1943.

（5） ゲーデル（1931). 不完全性定理.

T が実質的に自然数論をふくむ ω-無矛盾な帰納的公理系のとき,

$T \vdash A$ でも $T \vdash \neg A$ でもない命題 A が存在する. ($T \vdash A$ は A が T から証明可能なこと, $\neg A$ は A の否定「A でない」を意味する).

「T が無矛盾である」ことを表現する自然数論の命題 Con[T] に対し,

$$T \vdash \mathrm{Con}[T] \text{でない.}$$

（6） ゲーデル（1938). AC と GCH の相対無矛盾性.

AC は選択公理（Axiom of Choice), GCH は一般連続体仮説（Generalized Continuum Hypothesis）をあらわすとする. ZF を Zermelo（ツェルメロ)-Fraenkel（フレンケル）の集合論とするとき,

$$\mathrm{ZF}\ \text{が無矛盾} \Longrightarrow \mathrm{ZF} + \mathrm{AC} + \mathrm{GCH}\ \text{も無矛盾}$$

命題（論理式と呼び変えられる), 公理系, 証明可能, モデル, 健全性, 完全性, 無矛盾, AC, GCH 等の用語と上述した成果の内容を理解することが第 2 の課題である.

3° 20世紀後半の発展

（1） Nonstandard Method（1960 初). A. Robinson "Nonstandard Analysis" によってひろく知られるようになった. Nonstandard model の方法は, やがて数学内部にとどまらず場の量子論等の応用分野にもひろく適用されるようになった.

（2） Cohen (1963). GCH の ZFC からの独立性，AC の ZF からの独立性の証明 (Cohen 革命).

GCH は肯定も否定も ZFC(ZF + AC) から証明できないこと.

AC は肯定も否定も ZF から証明できないこと.

（3） Matijasevič (マチャセヴィッツ) (1970). ヒルベルト第10問題の否定的解決.

ヒルベルト第10問題——整係数多項式 $p(x_1, \ldots, x_n)$ に対する方程式

$$p(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

が整数解をもつか否かを判定するアルゴリズムを求めよ——答. そのようなアルゴリズムは存在しない.

（4） Cook (1975). NP-complete な NP-言語の発見. L_{sat} (充足可能な命題論理式の全体) がそれであることを証明.

（5） Parris-Harrington (1977). ふつうの算術の問題 (組合わせ問題) で，証明論的に非決定な命題を提唱.

（6） Buss (1986). Bounded Arithmetic の出版，Computer Science の基礎論化. これによって P = ?NP 問題等が証明論的，モデル論的方法による研究対象となる.

（7） Håstad，Ajtai 等. Pigeon Hole Principle の弱い算術からの独立性問題.

（8） 以上はかなり主観的な選択であり，たとえばモデル論の専門家なら Shelah を，公理論的集合論の専門家なら Martin-Steel-Woodin をあげるだろう.

とにかく Nonstandard method の拡がり，（2），（3）のような数学の問題に対する決着のつけ方，Computer Science との関連の深まり等によって，数学基礎論は数学諸分野の中で無視できない重要部門であることが全体に意識されるようになった. これらの成果と目標をその概略においてでも知っておくことが第3の課題である.

4° 本講の記述

次の順序でなされる．

集合の基本概念（論理記号との関連を重視して）→無限集合（カントールの集合論，連続体仮説．いわゆる「青少年集合論」，「アマチュア集合論」）→パラドクスの出現と基礎の危機→公理論へ（算術と集合論の公理化），形式主義的公理主義の成立（項，論理式，述語論理，証明，無矛盾性）→命題論理（その健全性と完全性）→レーヴェンハイム・スコーレム→述語論理の完全性→原始帰納関数→ゲーデル不完全性定理→一般帰納関数（チャーチの提唱，クリーニの2定理）→P=?NP 問題→・・・（第2の課題まで）．

I　集合に関する基本概念(集合と論理)

以下,

- $\boldsymbol{N}$（0から始まる自然数全体の集合）
- $\boldsymbol{Z}$（0および正負の整数全体の集合）
- $\boldsymbol{Q}$（有理数全体の集合）
- $\boldsymbol{R}$（実数全体の集合）

の記号を用いる.

1°　帰属関係（外延的定義と内包的定義）

$$a \in A$$

という関係（帰属関係——membership relation——という）が出発点である．ここに A は集合（はじめは自然数の有限集合あたりを念頭におけばよい）であり，$a \in A$ は「a は A に属する」,「a は A の元（要素）——element——である」と読む．集合を定義するのに**外延的定義**と**内包的定義**がある.

外延的定義とは集合の元を全部並べて $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ のように指定するやり方である．たとえば $A=\{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$．内包的定義は性質 $A(x)$ によって「A は性質 $A(x)$ をみたす x の全体である」として定義するやり方である.

$$x \in A \Longleftrightarrow A(x)$$

によって定義される．($\Longleftrightarrow$ については後述)．このとき A は $\{x | A(x)\}$ または $\{x : A(x)\}$ と書かれる．たとえば上にあげた集合 $A=\{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ は $A(x)$ を「x は10以下の偶数である」としたときの $\{x | A(x)\}$ である.

有限集合は原則として外延的に定義されるが要素の数が大きい場合，実際上内包的定義によらざるを得ない場合が多い．たとえば上の例では，$A(x)$ が「x は100万

以下の偶数である」の場合を考えてみればよい．

無限集合は元をすべて列挙することは不可能だから内包的にしか定義できない．たとえば N における偶数の全体は $A=\{0, 2, 4, \ldots, 2n, \ldots\}$ などと書かれる場合があるが，これは略式であって（... は数学の記号として定義されていない）．正確には $\{x|x\in N$ かつ $2|x\}$ と書かれるべきものである．ここに $2|x$ は「x が偶数である」を表す．

2° 論理記号

以下次の論理記号を用いる．

$\neg$（でない），$\vee$（あるいは），$\wedge$（そして），$\rightarrow$（ならば），$\forall$（すべての），$\exists$（存在する）

英語でいえば，"not"，"or"，"and"，"imply"，"for all"，"there exists" である．

真偽表

p，q を真偽の値をとる命題を表すとき，$\neg p$（p でない），$p\vee q$（p あるいは q），$p\wedge q$（p かつ q），$p\rightarrow q$（p ならば q）もそれぞれ真偽の値をとる命題である．p，q が真偽（T F であらわす——True，False の頭文字をとって——）の値をとるとき，それに応じて $\neg p$，$p\vee q$，$p\wedge q$，$p\rightarrow q$ も真偽の値をとる．そのとり方を示す表を真偽表という．

p	$\neg p$
T	F
F	T

$\neg p$ は p が真のとき偽，p が偽のとき真となる

p	q	$p\vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

$p\vee q$ は p，q の少なくとも 1 つが真のときは真，両方とも偽のときのみ偽となる

p	q	$p\wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

$p\wedge q$ は p, q がともに真のとき真,
少なくとも1つが偽のとき偽となる

p	q	$p\to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

$p\to q$ は p が真で q が偽のときのみ偽,
それ以外はつねに真となる.

これは日常的用法とかなり異なっているように見える. $\neg$ と $\wedge$ は日常的用法と一致するにしても,「p か q である」というとき日常的には p, q の一方だけが真で他方は偽であるという場合が多い. これは exclusive or (排他的あるいは) と呼ばれ $p\oplus q$ と書かれる. これは $(p\wedge(\neg q))\vee(q\wedge(\neg p))$ のことであって $p\vee q$ とは異なる.

$p\to q$ はもっとも日常的用法から剥離しているように見える. p が偽のときは, $p\to q$ は q が真でも偽でも真になるから, たとえば $1=0\to 5=5$ も $1=0\to 5=4$ もともに真になる. 奇妙に見えるだけでこれは数学では正しい式なのである. 日常では「p ならば q」というとき, p が偽になる場合は想定されていないのがふつうである. いずれにせよ数学では上に述べた真理表にしたがって $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\to$ を用いるのである.

$\forall$, $\exists$ は $\forall xA(x)$, $\exists xA(x)$ の形で用いられる. ここに $A(x)$ は x に関する性質で, x は特定の集合 ($\boldsymbol{N}$ とか $\boldsymbol{Z}$ とか $\boldsymbol{Q}$ とか $\boldsymbol{R}$) を動く変数である. $\forall xA(x)$ は「すべての x に対して $A(x)$ である」“For all x A(x)” と読み, $\exists xA(x)$ は「ある x が存在して $A(x)$ である」“There exists x such that A(x)” と読む.

$\forall xA(x)$ はすべての x について $A(x)$ が真のとき真となり, そうでないとき, すなわち $A(x)$ が偽となる x が存在するとき偽となる.

$\exists x A(x)$ はある x が存在して $A(x)$ が真となるとき真であり，そうでないとき，すなわちすべての x について $A(x)$ が偽のとき偽となる．

$p \leftrightarrow q$ とは $(p \to q) \wedge (q \to p)$ のことだとする．

数学の命題 A，B に対し，$A \Longrightarrow B$ とは $A \to B$ が真であることを表すとする．A が偽のときは $A \to B$ はつねに真であるから，このことは「A が真ならば B は真」を表す．

$A \Longleftrightarrow B$ は $A \Longrightarrow B$ かつ $B \Longrightarrow A$ であること，すなわち A が真なら B は真であり，B が真なら A が真であることを表す．

$A \overset{\mathrm{D}}{\Longleftrightarrow} B$ は A を B によって定義することを意味する．

よく出てくる論理の公式．

(i) $p \vee \neg p$ は常に真である．排中律という．

(ii) $\neg\neg p \Longleftrightarrow p$．2重否定の法則という．

(iii) $p \to q \Longleftrightarrow \neg p \vee q$．

(iv) $\neg(p \to q) \Longleftrightarrow p \wedge \neg q$．

(v) $\neg(p \wedge q) \Longleftrightarrow (\neg p) \vee (\neg q)$．（ド・モルガンの法則という）

(v)′ $\neg(p \vee q) \Longleftrightarrow (\neg p) \wedge (\neg q)$．（ド・モルガンの法則という）

(vi) $p \wedge (q \vee r) \Longleftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$．（分配則という）

(vi)′ $p \vee (q \wedge r) \Longleftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$．（分配則という）

(vii) $p \wedge (q \wedge r) \Longleftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$．（結合則という）

(vii)′ $p \vee (q \vee r) \Longleftrightarrow (p \vee q) \vee r$．（結合則という）

(viii) $p \wedge q \Longrightarrow p$．　(viii)′ $p \wedge q \Longrightarrow q$．

(ix) $p \Longrightarrow p \vee q$．　(ix)′ $q \Longrightarrow p \vee q$．

(x) $p \wedge (p \to q) \Longrightarrow q$．3段論法という．

いずれも ⇒ の方は，左辺が真なら右辺も真であること．⇐ の方は左辺が偽なら右辺も偽であること（あるいは右辺が真なら左辺も真であること）を真偽表によっ

て確かめればわかる.

次の公式も重要であるので十分確認しておくことが必要である.

(xi) $\neg\,\forall x A(x) \Longleftrightarrow \exists x \neg A(x)$, したがって $\forall x A(x) \Longleftrightarrow \neg\,\exists x \neg A(x)$.

(xi)′ $\neg\,\exists x A(x) \Longleftrightarrow \forall x \neg A(x)$, したがって $\exists x A(x) \Longleftrightarrow \neg\,\forall x \neg A(x)$.

$\neg(a \in A)$ すなわち a は A の元でないことを $a \notin A$ とも書く.

3° 包含関係と相等

(1) **包含関係.** 2つの集合 A, B に関し, A の元がすべて B の元であるとき, $A \subseteq B$ と書き, A は B に含まれる (B は A を含む) あるいは A は B の部分集合であるという. すなわち,

定義 $A \subseteq B \overset{\mathrm{D}}{\Longleftrightarrow} \forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$.

(2) **相等.** A の元と B の元が全体として同じであるとき, A と B は等しいと定め $A = B$ と書く. すなわち

定義 $A = B \overset{\mathrm{D}}{\Longleftrightarrow} A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Longleftrightarrow \forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$.

(3) **真部分集合.** A が B の部分集合であるが等しくはないとき, A は B の真部分集合であるといい, $A \subsetneq B$ と書く. すなわち

定義 $A \subsetneq B \overset{\mathrm{D}}{\Longleftrightarrow} (A \subseteq B) \wedge (A \neq B) \Longleftrightarrow (A \subseteq B) \wedge \neg(B \subseteq A)$.

注 1)「含まれる」と「属する」を混同しないこと.

注 2) $A = B$ は $A \subseteq B$ の特別の場合であること.

命題 $A \subsetneq B \Longrightarrow \exists x(x \in B \wedge x \notin A)$.

[証明] (論理の演習として)

$$
\begin{aligned}
A \subsetneq B \Longrightarrow A \subseteq B \wedge \neg(B \subseteq A) &\Longrightarrow \neg(B \subseteq A) && \text{((viii)}'\text{による)}\\
&\Longrightarrow \neg\,\forall x(x \in B \rightarrow x \in A) && (\subseteq\text{の定義})\\
&\Longrightarrow \exists x \neg(x \in B \rightarrow x \in A) && \text{((xi)による)}\\
&\Longrightarrow \exists x(x \in B \wedge x \notin A) && \text{((iv)による)}
\end{aligned}
$$

4° 合併，共通分，差

（1）**合併**．集合 A，B の少なくとも一方に属する元の全体を $A\cup B$ と書き，A，B の合併という．すなわち

定義 $A\cup B\overset{\mathrm{D}}{=}\{x\mid (x\in A)\vee(x\in B)\}$．

ここでふつうのテキストではベン図（オイラー図ともいう）が書かれるのだが，ここでは自然数の有限集合で例を示そう．$A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{3,4,5,6\}$ なら $A\cup B=\{1,2,3,4,5,6\}$．

（2）**共通分**．集合 A，B の両方に属する元の全体を $A\cap B$ と書き，A，B の共通分という．すなわち

定義 $A\cap B=\{x\mid (x\in A)\wedge(x\in B)\}$．上の例 A，B に対しては $A\cap B=\{3,4\}$．

（3）**空集合** 元を一つももたない集合を考える必要がある．空集合を $\emptyset$ と書く．すなわち

定義 $\forall x(x\notin\emptyset)$．

$$A=\{1,2,3,4\},\ B=\{5,6,7,8\}\ \text{ならば}\ A\cap B=\emptyset.$$

命題 任意の集合 A に対し，$\emptyset\subseteq A$．

［証明］任意の x に対して，$x\in\emptyset\to x\in A$ が真であることをいえばよいが，$x\in\emptyset$ はつねに偽だから，$x\in\emptyset\to x\in A$ は真になる．

（4）**諸公式．**

（i） $A\subseteq A\cup B$，$B\subseteq A\cup B$．

（ii） $A\cap B\subseteq A$，$A\cap B\subseteq B$．

（iii） $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$．（**結合則**）

（iv） $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$．（**分配則**）

［証明］　(i) $x\in A\Longrightarrow(x\in A)\vee(x\in B)$　(2° の公式(ix)による)　$\Longrightarrow x\in A\cup B$.

(ii)は 2° の公式(viii)による.

(iii)論理の結合法則 (2° の公式(vii), (vii)′) による. すなわち

$$
\begin{aligned}
x\in(A\cup B)\cup C &\Longleftrightarrow (x\in A\cup B)\vee x\in C\\
&\Longleftrightarrow ((x\in A)\vee(x\in B))\vee(x\in C)\quad (A\cup B\text{ の定義})\\
&\Longleftrightarrow (x\in A)\vee((x\in B)\vee(x\in C))\\
&\Longleftrightarrow x\in A\vee(x\in B\cup C)\quad (2^\circ\ (\text{vii})'\text{と}\cup\text{の定義})\\
&\Longleftrightarrow x\in(A\cup(B\cup C)).\quad (\cup\text{の定義})
\end{aligned}
$$

(iv)論理の分配法則 2° の公式(vi), (vi)′による.

$$
\begin{aligned}
x\in A\cap(B\cup C) &\Longleftrightarrow (x\in A)\wedge(x\in B\cup C)\\
&\Longleftrightarrow (x\in A)\wedge((x\in B)\vee(x\in C))\quad (\cap,\ \cup\text{の定義})\\
&\Longleftrightarrow ((x\in A)\wedge(x\in B))\vee((x\in A)\wedge(x\in C))\quad (2^\circ\text{の公式(vi)})\\
&\Longleftrightarrow (x\in A\cap B)\vee(x\in A\cup C)\quad (\cap\text{の定義})\\
&\Longleftrightarrow x\in(A\cap B)\cup(A\cap C).\quad (\cup\text{の定義})
\end{aligned}
$$

(5) **差**. A に属し, B に属さない元の全体を $A-B$ と書き, A と B の差という. すなわち

定義　$A-B=\{x\mid(x\in A)\wedge(x\notin B)\}$.

5° 補集合

ある集合 X の部分集合 A に対し, X における A の補集合とは $X-A$ のことであって A^c と書く.

定義　$A\subseteq X$ に対し, $A^c=X-A$.

ド・モルガン(de Morgan)則　A, B を X の部分集合とするとき,

$$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$$

$$(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$$

［証明］ $x \in X$ に対し

$$
\begin{aligned}
x \in (A \cup B)^c &\iff \neg (x \in A \cup B) \\
&\iff \neg ((x \in A) \vee (x \in B)) \\
&\iff (\neg (x \in A)) \wedge (\neg (x \in B)) \quad \text{(論理のド・モルガン則(v)')} \\
&\iff (x \in A^c) \wedge (x \in B^c) \quad (A^c,\ B^c \text{ の定義}) \\
&\iff x \in A^c \cap B^c
\end{aligned}
$$

もう一つの公式も同様.

6° 巾(ベキ)集合

集合 X の部分集合の全体を X の巾(ベキ)集合といい $\mathbf{P}(X)$ で表す．すなわち

$$\mathbf{P}(X) = \{A \mid A \subseteq X\}.$$

$\mathbf{P}(X)$ には空集合も X 自身も入っていることに注意しよう．

$$\emptyset \in \mathbf{P}(X),\ X \in \mathbf{P}(X).$$

7° 対，順序対，列

（1）**対．** $\{a, b\}$は a，b だけを元とする集合を表し，a, b の対という．$a = b$ のとき，$\{a, b\} = \{a, a\} = \{a\}$（$a$ だけを元とする集合）である．＝の定義にもとづく．

（2）**順序対．** 次の条件をみたす $\langle a, b \rangle$ を a, b の順序対という．(a, b) と書くこともある．

$$\langle a, b \rangle = \langle a', b' \rangle \iff a = a' \wedge b = b'.$$

$\langle a, b \rangle = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ とおくと $\langle a, b \rangle$ は順序対の性質をもつ．

［証明］ $\Rightarrow$ だけをいえばよい．

（i） $\{x, y\} = \{x, z\} \to y = z$ をいう．

$x = y$ ならば $\{x, y\} = \{x, x\} = \{x\} = \{x, z\}$，$z \in \{x\}$だから $x = z$，ゆえに $x = y = z$．

$x \neq y$ ならば $y \in \{x, y\} = \{x, z\}$ だから $y = x$ あるいは $y = z$, $y \neq x$ だから $y = z$.

(ii) $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a'\}, \{a', b'\}\} \Longrightarrow a = a', b = b'$ をいう.

$$\{a\} \in \{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a'\}, \{a', b'\}\}$$

だから $\{a\} \in \{\{a'\}, \{a', b'\}\}$. したがって $\{a\} = \{a'\}$ か $\{a\} = \{a', b'\}$.

(ii)-1 $\{a\} = \{a'\}$ のときは $a = a'$. ゆえに $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a\}, \{a, b'\}\}$. (i)より $\{a, b\} = \{a, b'\}$, ふたたび(i)より $b = b'$. ゆえに $a = a'$, $b = b'$.

(ii)-2 $\{a\} = \{a', b'\}$ のときは $a = a' = b'$. このときは

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a'\}, \{a', b'\}\} = \{\{a\}, \{a, a\}\} = \{\{a\}\}.$$

ゆえに $\{a, b\} = \{a\}$. よって $a = b$.

(3) **3重対, 一般の n 列.**

3重対は $\langle a, b, c\rangle = \langle a, \langle b, c\rangle\rangle$ によって定義される.

$$\langle a, b, c\rangle = \langle a', b', c'\rangle \Longrightarrow a = a' \wedge \langle b, c\rangle = \langle b', c'\rangle \Longrightarrow a = a' \wedge b = b' \wedge c = c'$$

n 列 $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle$ まで定義されたとして

$$\langle a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}\rangle = \langle a_1, \langle a_2, \ldots, a_{n+1}\rangle\rangle$$

によって $n+1$ 列を定義する. このとき

$$\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle = \langle b_1, \ldots, b_m\rangle \Longleftrightarrow n = m \wedge a_1 = b_1 \wedge \cdots \wedge a_n = b_m$$

8° 積集合

集合 A, B に対し, A の元 x と B の元 y の順序対 $\langle x, y\rangle$ の全体を $A \times B$ と書き, A, B の積 (product) または直積 (direct product) という. すなわち

$$A \times B = \{\langle x, y\rangle \mid x \in A \wedge y \in B\} = \{z \mid \exists x \exists y (z = \langle x, y\rangle \wedge x \in A \wedge y \in B)\}.$$

同様に n 個の集合 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ に対し

$$A_1 \times \cdots \times A_n = A_1 \times (A_2 \times \cdots \times (A_{n-1} \times A_n)) \cdots)$$

$$=\{\langle x_1,\dots,x_n\rangle \mid x_1\in A_1\wedge\cdots\wedge x_n\in A_n\}.$$

とくに $A=A_1=A_2=\cdots=A_n$ のとき，$\underbrace{A\times\cdots\times A}_{n}=A^n$ と書く．

A が有限集合のとき，その元の個数を $|A|$ と書くと

$$|A\times B|=|A|\times|B|,\qquad |\mathbf{P}(X)|=2^{|X|}$$

である．実数全体の集合を $\boldsymbol{R}$ とするとき $\boldsymbol{R}^2$ は $\langle x,y\rangle\ (x,y\in\boldsymbol{R})$ の全体であるからこれを座標と考えると 2 次元空間（平面）を，$\boldsymbol{R}^3$ は 3 次元空間（いわゆる空間）を表す．

集合概念は日常的な有限集合をモデルにしているとよくいわれるが，厳密には間違いである．$A=\{a,b\}$，$A'=\{a',b'\}$としよう．

$$\mathbf{P}(A)=\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\}\},\ A\times A'=\{\langle a,a'\rangle,\langle a,b'\rangle,\langle b,a'\rangle,\langle b,b'\rangle\}$$

である．たとえば a，b は男子生徒，a'，b' は女子生徒とする．忍法分身の術を用いることなしにいかにして a は $\mathbf{P}(A)$ において $\{a\}$，$\{a,b\}$の 2 個所に現れることができようか．$A\times A'$ についても同様である．モノの集合である限り，ベキ集合，積集合は一般には作れない．シンボル（記号）の集合としてはじめて集合の基本演算は実現できるのである．シンボルは断りなしに任意個数のコピーをもつことが前提とされている．集合概念の導入にあたってあえて有限集合といわず，自然数の有限集合といったのはこのことのためである．

9° 写像

（1）**ふつうの定義．** 集合 E，F（$E=F$ でもよい）において，E の任意の元 x に対して F のただ 1 つの元 y を対応させる規則があるとき，その対応を f で表し E から F への写像

$$f:E\to F$$

と書く．f によって x が y に移るとき

$$y=f(x) \text{ または } f: x \mapsto y$$

と書く.

注 1) 写像，対応，関数は同じ意味で用いる.

注 2) 多価関数というものは現代数学では一般に考えない. $x \in E$ に対し F の元 $y_1, \ldots, y_n$ を対応させることが問題になる場合には

$$f: x \mapsto \{y_1, \ldots, y_n\} \ (f: E \to \mathbf{P}(F)) \quad \text{または}$$
$$f: x \mapsto \langle y_1, \ldots, y_n \rangle \ (f: E \to F^n)$$

として E から $\mathbf{P}(F)$ への（または F^n への）一価関数を考える.

E から F への 2 つの写像 $f, g: E \to F$ の**相等**は

$$f=g \overset{\mathrm{D}}{\Longleftrightarrow} \forall x (x \in E \to f(x)=g(x))$$

によって定義される.

(2) **合成.** 写像 $f: E \to F$, $g: F \to G$ に対し，写像 $E \ni x \mapsto g(f(x))$ のことを f と g の合成写像といい $g \circ f$ と書く.

(3) **述語.** 集合 X 上の述語——ふつう $p(x)$ などで書くが——とは，X から 2 個の元からなる集合$\{T, F\}$への写像 $p: X \to \{T, F\}$のことである. $x \in X$ ごとに真偽の値が定まる関数のことである.

(4) **写像のグラフ，グラフによる写像の定義.** 写像 $f: E \to F$ に対し，順序対 $\langle x, f(x) \rangle$ の全体を f のグラフといい G_f で表す. すなわち

$$G_f \overset{\mathrm{D}}{=} \{\langle x, f(x) \rangle \mid x \in E\}.$$

$G_f \subseteq E \times F$ である. G_f は次の性質をもつ.

$$(\forall x \in E)(\exists y \in F)(\langle x, y \rangle \in G_f),$$
$$(\forall x \in E)(\langle x, y \rangle \in G_f \wedge \langle x, y' \rangle \in G_f \longrightarrow y=y').$$

逆に $E\times F$ の部分集合 G が

$$(\forall x\in E)(\exists y\in F)(\langle x,y\rangle\in G),$$
$$(\forall x\in E)(\langle x,y\rangle\in G\wedge\langle x,y'\rangle\in G\longrightarrow y=y').$$

をみたすとき，$\langle x,y\rangle\in G\Longleftrightarrow f(x)=y$ とおくことによって関数（写像）$f:E\to F$ が定義され，G はこの関数のグラフとなる．集合論ではふつう関数はこのようにして定義される．

（5）**像，逆像**．$f:E\to F$ と E の部分集合 $X\subseteq E$ に対し，X の f による**像** $f[X]$ が次のように x が X を動くときの $f(x)$ の全体として定義される．すなわち

$$f[X]=\{f(x)\,|\,x\in X\}=\{y\,|\,\exists x(x\in X\wedge y=f(x))\}.$$

とくに $f[E]$ のことを f の値域という．$f[X]$ のことを $f``X$ と書くこともある．

像の性質．$f:E\to F$ と $X,Y\subseteq E$ に対し

（i）　$X\subseteq Y\Longrightarrow f[X]\subseteq f[Y]$,

（ii）　$X\neq\emptyset\Longrightarrow f[X]\neq\emptyset$,

（iii）　$f[X\cup Y]=f[X]\cup f[Y]$,

（iv）　$f[X\cap Y]\subseteq f[X]\cap f[Y]$.

（iv）の $\subseteq$ を $=$ にすることはできない．たとえば $E=\{a,b,c\}$，$F=\{0,1\}$，$f(a)=0$，$f(b)=0$，$f(c)=1$ とする．$X=\{a,c\}$，$Y=\{b,c\}$ とするとき

$$f[X\cap Y]=f[\{c\}]=\{1\},\ f[X]=\{0,1\},\ f[Y]=\{0,1\}$$

だから $f[X\cap Y]=f[X]\cap f[Y]$ でない．

写像 $f:E\to F$ と $Y\subseteq F$ に対し，f によって Y に移る E の元の全体を $f^{-1}[Y]$ と書き，Y の f による**逆像**という．すなわち

$$f^{-1}[Y]=\{x\,|\,x\in E\wedge f(x)\in Y\}.$$

逆像の性質．$f:E\to F$ と $X,Y\subseteq F$ に対し

(i)′　$X \subseteq Y \Longrightarrow f^{-1}[X] \subseteq f^{-1}[Y]$,

(ii)′　$f^{-1}[X \cup Y] = f^{-1}[X] \cup f^{-1}[Y]$,

(iii)′　$f^{-1}[X \cap Y] = f^{-1}[X] \cap f^{-1}[Y]$,

(iv)′　$f^{-1}[Y^c] = (f^{-1}[Y])^c$.

$\subseteq$, $\cup$, $\cap$, $(\quad)^c$ は f^{-1} によって保存されるわけである.

(6) **単射，全射，双射**. $f: E \to F$ とする.

単射 (injection).

$$f: E \to F \text{ が単射} \overset{\mathrm{D}}{\Longleftrightarrow} x \neq x' \to f(x) \neq f(x')$$

$$\Longleftrightarrow f(x) = f(x') \to x = x'$$

全射 (surjection).

$$f: E \to F \text{ が全射} \overset{\mathrm{D}}{\Longleftrightarrow} f[E] = F$$

$$\Longleftrightarrow (\forall y \in F)(\exists x \in E)(y = f(x)).$$

全射のことを上への (onto) 写像ともいう.

双射 (bijection). 単射かつ全射のこと. 全単射とも1対1上への (onto) 写像ともいう.

10° 合併と共通分の拡張

X を，その元がすべて集合であるような集合とする.(公理的集合論では集合一元論の立場を取り，集合の元もつねに集合であるのでわざわざことわる必要はない). X のすべての元 (集合) の合併，X のすべての元 (集合) の共通分を $\bigcup X$, $\bigcap X$ と書く. すなわち

$$\bigcup X = \{u \mid (\exists z \in X)(u \in z)\}, \quad \bigcap X = \{u \mid (\forall z \in X)(u \in z)\}.$$

次のように書いた方がわかりやすいかも知れない.

$$\bigcup X = \bigcup \{z \mid z \in X\}, \quad \bigcap X = \bigcap \{z \mid z \in X\}.$$

11° 集合の族の合併と共通分

（1）**族**．基礎論ではとくに必要なわけではないが，現場の数学では次のようなある集合 E の元の族 $(x_i)_{i\in I}$，E の部分集合の族 $(X_i)_{i\in I}$ を考えることが便利なことが多い．（たとえばブルバキ）．

I を集合とする（添字集合と呼ばれる）．E の元の族とは I から E への一つの写像 $x: i\mapsto x_i\in E$ のことである．E の部分集合の族 $(X_i)_{i\in I}$ とは，I からベキ集合 $\mathbf{P}(E)$ への写像 $X: i\mapsto X_i$ のことである．

（2）**集合の族** $(X_i)_{i\in I}$ **の合併** $\bigcup_{i\in I}X_i$，**共通分** $\bigcap_{i\in I}X_i$ は次のように定義される．

$$\bigcup_{i\in I}X_i=\{x\mid \exists i\in I(x\in X_i)\},$$

$$\bigcap_{i\in I}X_i=\{x\mid \forall i\in I(x\in X_i)\}.$$

任意の集合 A に対し，$a\in A$ に対して $a=X_a$ とおけば A を添字集合とする A の元の族 $(X_a)_{a\in A}$ が得られるが，これに対し $\bigcup A=\bigcup_{a\in A}X_a$，$\bigcap A=\bigcap_{a\in A}X_a$ となる．

（3）**推移的集合と推移的閉包**．

定義　集合 A が**推移的**（**transitive**）とは，$x\in A$，$y\in x\rightarrow y\in A$ が成り立つもの，すなわち $\forall x(x\in A\Longrightarrow x\subseteq A)$ となる集合のことである．公理的集合論での最重要な概念の一つである．

命題　与えられた集合 A に対し，A を含む最小の推移的集合 $\mathrm{TC}(A)$ が存在する．この $\mathrm{TC}(A)$ のことを A の**推移的閉包**（**transitive closure**）という．

［証明］与えられた集合 A に対し，任意の $n\in\boldsymbol{N}$ に対する A_n を次のように帰納的に定義する．

$$A_0=A,\qquad A_{n+1}=\bigcup A_n.$$

$\mathrm{TC}(A)=\bigcup_{n\in N}A_n$ が求めるものである．$A\subseteq\mathrm{TC}(A)$ は明らか．

TC(A) が推移的であること．$x\in$ TC(A) ならば，ある n に対して $x\in A_n$．あきらかに $x\subseteq\bigcup A_n=A_{n+1}$．したがって $x\subseteq$ TC(A)．

TC(A) が A を含む最小の推移的集合であること．$A\subseteq A'$ で A' が推移的だとする．$A_0=A\subseteq A'$．$A_n\subseteq A'$ を仮定する．$x\in A_{n+1}$ ならば，$x\in y$，$y\in A_n$ となる y がある．仮定によって $y\in A'$ だから，A' の推移性によって $x\in A'$．したがって $A_{n+1}\subseteq A'$．数学的帰納法によって，すべての $n\in N$ に対して $A_n\subseteq A'$．したがって TC$(A)\subseteq A'$．　□

II　無限集合

1°　無限集合の第1性質

まずそれは自分自身のある真部分集合と一対一対応する（双射がある）という性質である．

たとえば自然数全体の集合 $\boldsymbol{N}$ と偶数全体の集合 A（明らかに $A \subsetneq \boldsymbol{N}$）に対し

$$\boldsymbol{N} \ni n \mapsto 2n$$

は $\boldsymbol{N}$ から A への双射である．このことはガリレイによって指摘されていたが，ライプニッツはこれは「全体は部分より大きい」という大原則に反するとし，無限集合を考えることは不合理に導くと結論した．

19世紀前半を通じて数学の王者であったガウスも，無限数列のような過程的，可能的無限は取り扱えるが，完結した実無限を扱うことには強く反対した．

しかし実数論の基礎づけに関連して実数の集合を実無限として考察することを通じて実無限は徐々に数学の中に浸透してきた．マルチン・オーム，ボルツァーノ，ワイヤストラス，フルヴィッツ，メレイらの系譜である．たとえばボルツァーノは著書「無限のパラドクス」において，上記無限の第1性質を無限を特徴づける一つの本性として肯定的に記述している．

実数論の基礎づけ（実数を有理数の集合 $\boldsymbol{Q}$ から構成すること）は1872年にデデキント（切断の理論），カントール（コーシー列の理論）によって果された．

2°　デデキント

無限集合を数学の基礎に取り入れ，そしてそれを秩序立って考察した最初の人はデデキントであった．1889年出版の有名な「数とは何か．何であるべきか」（その

構想は 1872-78に練られたもの）では集合の相等，部分集合，写像，合成，値域，一対一対応等が系統的に述べられている．

彼はボルツァーノと同様に無限集合を，その真部分集合と一対一対応できるものとして定義したが，無限集合の存在証明として「わが思考の世界」(Meine Gedanken Welt) をあげた．

A をわが思考の世界の一要素とすれば「A はわが思考である」もわが思考の世界の一要素であり，「……はわが思考である」の形でないわが思考は一杯あるから，A に「A はわが思考である」を対応させる対応は，その世界をその真部分集合に一対一に対応させる．ゆえにわが思考の世界は無限集合であるというのである．おおらかな時代の証明である．

ついでにいえばヘーゲルはその「論理学」において，向自有 (für sich sein) について次のように述べている．「それは観念性であり無限性であって，その典型例は自我である」と．

3° カントール

フーリエ級数論から出発し，例外点の研究を通じて集積点，導集合の概念に到達し (1872)，後に 6 回に分けて発表される「無限線形集合」において今日の位相構造の理論の基本概念を発見した (1878-1884) が，1874年以降独自の集合論を展開する．そのうちのいくつかをあげて後に説明する．

（1） 一対一対応にもとづき無限集合の濃度の概念を導入し，

（2） 無限集合の濃度に大小の区別があること．たとえば $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{Q}$ および代数的数の全体は同じ濃度をもつが $\boldsymbol{R}$ はそれより大きな濃度をもつ．

（3） 直線 $\boldsymbol{R}$ と平面 $\boldsymbol{R}^2$ は同じ濃度をもつ．

（4） 任意に大きな濃度が存在する．ベキ集合 $\mathrm{P}(X)$ の濃度は X の濃度より大きい．

等の画期的発見を行った．

類のない創造の緊張と学会の無理解によるストレスのため，しばしば精神を病み結局ハレの精神病院で亡くなった（1918）．

4° 集合の濃度

（1）対等と濃度

集合 A，B について A から B への双射（A から B の上への一対一対応）があるとき，A と B は対等であるといい，$A \simeq B$ と書く．

A と対等な集合の代表をきまったやり方で選び，その代表を$|A|$と書き，A の濃度という．今日では$|A|$は A と対等な順序数のうち最小のものとして定義される．これが存在することは選択公理（後述）によって証明される．

任意の集合 A，B に対し，$|A|<|B|$か$|A|=|B|$か$|A|>|B|$のうちの一つが成り立つ．すなわち2つの集合の濃度はつねに比較可能である．

（2）カントール・ベルンシュタインの定理

A から B への単射 $f: A \to B$ があり，B から A への単射 $g: B \to A$ があれば $A \simeq B$，すなわち A から B への双射がある．

［証明］$x \in A$，$y \in B$ に対し，

- $f(x)=y$ のとき x を y の親，y を x の子という．
- $g(y)=x$ のとき y を x の親，x を y の子という．

単射性から親は存在すれば唯一つである．

A，B の元で親のないものを第0代の元といい，第0代の元の子を第1代，第1代の元の子を第2代，その子を第3代，一般に n 代の元の子を $n+1$ 代の元という．

A の元で偶数代の元の集合を A_0，奇数代の元の集合を A_1，その他の元の集合を A_∞ とおく．$A=A_0 \cup A_1 \cup A_\infty$ で A_0，A_1，A_∞ は互いに共通分がない．

B の元で偶数代の元の集合を B_0，奇数代の元の集合を B_1，その他の元の集合を B_∞ とすればやはり $B=B_0 \cup B_1 \cup B_\infty$ で B_0，B_1，B_∞ は互いに共通分がない．

あきらかに，$f[A_0]=B_1$，$g[B_0]=A_1$．しかるに $f[A_\infty]=B_\infty$ である．

なぜなら $y \in B_\infty$ に対し，$f(x)=y$ となる $x \in A$ がなければ，y は第0代の元であり $y \in B_0$ となって矛盾するから，$y=f(x)$ となる $x \in A$ は存在する．$x \in A_0$ または $x \in A_1$ ならば，$y \in B_1$ または $y \in B_0$ となってやはり矛盾するから，$x \in A_\infty$ でなければならない．

$A_0 \simeq B_1$，$A_1 \simeq B_0$，$A_\infty \simeq B_\infty$ だから，$A \simeq B$ となる．　□

5° 可算集合

自然数の全体 $\boldsymbol{N}$ と対等な集合のことを可算集合（denumerable set または countableset）という．可算集合は $\{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$ と書ける．ただし $n \neq m$ に対して $a_n \neq a_m$．可算集合に関する基本的な事を列挙する．

定理　（1）　可算集合の部分集合は有限集合か可算集合である．

（2）　2つの可算集合の合併は可算集合である．

（3）　A，B が可算集合なら積 $A \times B$ も可算集合である．

（4）　$\boldsymbol{Z}$，$\boldsymbol{Q}$ は可算集合である．

（5）　$\boldsymbol{N}$ の有限列の全体は可算集合である．

（6）　$\boldsymbol{N}$ の有限部分集合の全体は可算集合である．

（7）　代数的数の全体は可算集合である．

（8）　無限集合は可算集合を含む．

［証明］（1）$\boldsymbol{N}$ の部分集合が有限集合か可算集合であることを見ればよいが，もし $\boldsymbol{N}$ の部分集合が有限集合でなければ，$\{n_0, n_1, n_2, \ldots\}$ の形の単調増大数列の形に書けることから明らかだろう．

（2）$A=\{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$，$B=\{b_0, b_1, b_2, \ldots\}$ に対し，

$$A \cup B = \{a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots\}$$

を作れ．同じものがあらわれたら飛ばす．

（3）$\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N} \simeq \boldsymbol{N}$ をいえばよい．$x \in \boldsymbol{N}$ に対し $x \mapsto \langle 0, x \rangle$ は $\boldsymbol{N}$ から $\boldsymbol{N}^2$ への単射で

ある．

$\langle x, y\rangle \in N^2$ に対し $2^x\cdot 3^y \in N$ を対応させる写像 $\langle x, y\rangle \mapsto 2^x\cdot 3^y$ は N^2 から N への単射である．($2^x\cdot 3^y = 2^{x'}\cdot 3^{y'}$ ならば $x = x'$，$y = y'$ である)．ゆえにカントール・ベルンシュタインの定理（以下 C–B の定理という）によって $N^2 \simeq N$.

（4） $Z = N \cup \{-n \mid n \in N\}$ だから（2）によって Z は可算である．有理数は m/n, $m \in Z$，$n \in N$，$n \neq 0$，$(m, n) = 1$ ((m, n) は m，n の最大公約数)の形に一義的に書けるから，写像 $Q \ni m/n \mapsto \langle m, n\rangle$ と（3）によって存在する単射 $f: Z \times N \to N$ の合成は Q から N への単射を与える．N から Q への単射の存在は明らかだから C–B の定理によって $Q \simeq N$ となる．

（5） N の有限列の集合を $N^{<\infty}$ と書く．$p_0, p_1, p_2, \ldots$ は小さい方から並べた素数 $2, 3, 5, 7, \ldots$ を表わすとする．$\langle x_0, x_1, \ldots, x_n\rangle \mapsto p_0^{x_0} p_1^{x_1} \cdots p_n^{x_n}$ は $N^{<\infty}$ から N への単射を与える．(素因数分解の一意性)．N から $N^{<\infty}$ への単射の存在は明らか ($x \mapsto \langle x\rangle = \{x\}$) だから，C–B の定理によって $N^{<\infty} \simeq N$.

（6） N の有限部分集合の全体を $[N]^{<\infty}$ と書く．N の有限部分集合 $\{n_1, \ldots, n_k\}$ に，その元を小さい方から大きさの順に並べた有限列を対応させる写像は $[N]^{<\infty}$ から $N^{<\infty}$ への単射を与え，（5）より $[N]^{<\infty}$ から N への単射が作れる．N から $[N]^{<\infty}$ への単射の存在は明らかだから，C–B の定理によって，$[N]^{<\infty} \simeq N$.

（7） 代数的数とは 1 変数整数係数多項式（次数＞0）の根となる数のことである．n 次整係数多項式は

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n, a_n \neq 0,\ n > 0,\ a_i \in Z$$

と書け，列 $\langle a_0, a_1, \cdots, a_n\rangle$ によって定まる．Z は可算だから（5）によってこれらの多項式の全体は可算である．これらの方程式の根の数は n 個以下だから結局代数的数の全体は可算である．（7）はデデキントによって証明された．

（8） 無限集合という場合二通りに解釈できる．

一つはある自然数 n に対し $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ に対等な集合を有限集合といい，有

限集合でない集合を無限集合と定義する場合である．この場合は無限集合が可算集合を含むことをいうには選択公理が必要である（後述）．

もう一つはボルツァーノ・デデキント流に無限集合とはその真部分集合への双射があるものだと定義する場合である．この場合は可算集合を含むことは選択公理なしに証明できる．

$B \subsetneq A$，$A \simeq B$ とし，f を A から B への双射とする．$p_0 \in A-B$ をとり，

$$p_1=f(p_0),\ p_2=f(p_1),\ \ldots,\ \text{一般に}\ p_{n+1}=f(p_n),\ \ldots$$

によって $p_0, p_1, p_2, \ldots$ を定義すればこれらは皆異なる．なぜなら $p_n=p_m$，$n>m$ とすれば $p_{n-m}=p_0$，$n-m>0$ となる．$f: A \to B$ だから $p_{n-m} \in B$．$p_0 \notin B$ だからこれは矛盾である．したがって $n \neq m$ ならば $p_n \neq p_m$ で $\{p_0, p_1, p_2, \ldots\}$ は可算集合である．

6° 連続体濃度

$a, b \in \boldsymbol{R}$，$a<b$ に対し

$$(a,b)=\{x \mid a<x<b\} \qquad [a,b)=\{x \mid a \leq x<b\} \qquad (a,b]=\{x \mid a<x \leq b\}$$
$$[a,b]=\{x \mid a \leq x \leq b\} \qquad (a,\infty)=\{x \mid a<x\} \qquad [a,\infty)=\{x \mid a \leq x\}$$
$$(-\infty,a)=\{x \mid x<a\} \qquad (-\infty,a]=\{x \mid x \leq a\} \qquad (-\infty,\infty)=\boldsymbol{R}$$

と書く．

定理 1　$(0,1]$，$[0,1]$，$(0,1)$，$[0,1)$ および任意の $a<b$ に対する (a,b)，$[a,b)$，$(a,b]$，$[a,b]$，$(-\infty,a]$，$(-\infty,a)$，(a,∞)，$[a,\infty)$，$(-\infty,\infty)$ は同じ濃度をもつ．

［証明］まずこれらの集合に 1 点（1 つの実数）を付加しても取り除いても濃度が変らないことをいう．このことはどんな無限集合についてもいえる．

無限集合 A は可算部分集合 $D=\{p_1, p_2, \ldots\}$ を含む．A に属さない数 p_0 を A に付加したものを $A'=A \cup \{p_0\}$ とおく．

$$A=(A-D)\cup D \quad (A-D \text{ と } D \text{ は共通分なし}),$$

$$A'=(A-D)\cup D\cup\{p_0\} \quad (A-D \text{ と } D\cup\{p_0\} \text{は共通分なし}).$$

明らかに $D\simeq D\cup\{p_0\}$ ($p_n\mapsto p_{n+1}$ を考えよ) だから $A\simeq A'$. 1点を取り除く場合も同様な考えでやれる.

これによって $(a,b)\simeq(a,b]\simeq[a,b]$ 等がいえたわけである.

写像 $x\mapsto y=(b-a)x+a$ は $(0,1)$ から (a,b) への双射を与えるから

$$(0,1)\simeq(a,b).$$

写像 $x\mapsto y=x/(x+1)$ は $[0,\infty)$ から $[0,1)$ への双射を与えるから

$$[0,\infty)\simeq[0,1).$$

写像 $x\mapsto y=-x/(x+1)$ は $(-1,0)$ から $(-\infty,0)$ への双射を与えるから

$$(-1,0)\simeq(-\infty,0).$$

したがって, $(-1,1)=(-1,0)\cup[0,1)\simeq(-\infty,0)\cup[0,\infty)=\boldsymbol{R}$. □

定理 2 $\boldsymbol{R}$ は非可算集合である.

[証明] $(0,1]$ が非可算であることをいう. $(0,1]$ の全体が $a^{(1)},a^{(2)},a^{(3)},\ldots$ と番号づけられたとする. $a^{(k)}$ を無限小数に展開して

$$a^{(k)}=0.a_1^{(k)}a_2^{(k)}\cdots \text{ とする. } a_i^{(k)} \text{ は } 0 \text{ から } 9 \text{ までの整数.}$$

この表現において 0 と異なる数字が無限個あらわれるという制限をおく. たとえば

$$0.1=0.0999\cdots, \qquad 1=0.999\cdots$$

とする. これによって小数展開による表現は一意的になる.

対角線に沿って $a_1^{(1)},a_2^{(2)},a_3^{(3)},\ldots$ に目をつけ

$$b_1\neq a_1^{(1)},b_2\neq a_2^{(2)},b_3\neq a_3^{(3)},\ldots,b_k\neq a_k^{(k)},\ldots$$

となるように 1 から 9 までの $b_1,b_2,b_3,\ldots,b_k,\ldots$ を選ぶ. このとき

$$b=0.b_1b_2b_3\cdots b_k\cdots$$

は $(0,1]$ に属し，b は小数点 1 位で $a^{(1)}$ と異なるから $b \neq a^{(1)}$．小数点 2 位で $a^{(2)}$ と異なるから $b \neq a^{(2)}$．以下同様に小数点 k 位で $a^{(k)}$ と異なるから $b \neq a^{(k)}$．b は $a^{(1)}$，$a^{(2)}, \ldots, a^{(k)}, \ldots$ のいずれとも異なる．これは $(0,1]$ のすべての数が $a^{(k)}$ によって番号づけられているという仮定に反する．　□

これが有名なカントールの対角線論法と呼ばれる証明である．彼はこの定理を区間縮小法によって1874年に得ていたが，この対角線論法による証明は1891年に発表された．

定理 3　$\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} \simeq \boldsymbol{R}$.

［証明］$(0,1] \times (0,1] \simeq (0,1]$ をいう．$\langle x, y \rangle \in (0,1] \times (0,1]$ とし，

$$x = 0.x_1 x_2 x_3 \cdots$$
$$y = 0.y_1 y_2 y_3 \cdots$$

を x, y の 2 進法展開とする．今度は x_i，y_i は 0 か 1 である．前と同様にたとえば

$$0.1 = 0.01111 \cdots$$

として 1 が無限にあらわれるように制限する．分子とは $00 \cdots 01$（0 がいくつか続いて 1 で終わる）か 1 だけからなるとしよう．すると $x_1 x_2 x_3 \cdots$，$y_1 y_2 y_3 \cdots$ は必ず無限個の分子で区切られる．それを

$$x = 0.a_1 a_2 a_3 \cdots$$
$$y = 0.b_1 b_2 b_3 \cdots$$

としよう．a_i，b_i はそれぞれ分子であり，$x_1 x_2 \cdots$，$y_1 y_2 \cdots$ には 1 が無限個あらわれるから，a_i，b_i は無限列である．$\langle x, y \rangle$ に $z = 0.a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3 \cdots$ を対応させると，$z \in (0,1]$ であって $\langle x, y \rangle \mapsto z$ は $(0,1] \times (0,1]$ から $(0,1]$ への単射を与える．

逆に $z \in (0,1]$ を分子表現の小数展開で $z = 0.c_1 c_2 c_3 \cdots$ とし，

$$x = 0.c_1 c_3 c_5 \cdots$$
$$y = 0.c_2 c_4 c_6 \cdots$$

とおけば，$z \mapsto \langle x, y\rangle$ は $(0,1]$ から $(0,1]\times(0,1]$ への単射を与える．

すなわち $(0,1]\times(0,1]\simeq(0,1]$ となる． □

注意） 2進法小数展開 $x=x_1x_2\cdots$，$y=y_1y_2\cdots$ に対して $z=x_1y_1x_2y_2x_3y_3\cdots$ を対応させれば一対一対応ができるとする本があるがこれは間違いである．

$z=0.0110101010\cdots$

のとき

$x=0.01111\cdots$

$y=0.10000\cdots$ （2位以下全部0）となって規約に反する

そこで $y=0.011\cdots$（3位以下すべて1）と直せば今度は $z=0.001111\cdots$ となってもとの z と異なるものになる．

カントールが $\boldsymbol{R}^2$ の方が $\boldsymbol{R}$ より濃度が大きいであろうとの予想をもって研究に取りかかったのが1874年，対等らしいことを悟りその意味するところを計りかねて実に3年間の考察に没頭する．1877年に対等性の証明をデデキントに送る．

デデキントは証明の間違いを指摘，カントールはすぐ新証明を作って送るがデデキントも考え込んで返事がなかなか来ない．ついにカントールは悲痛な調子で貴兄の判定を頂けないと精神の安定が得られないとわめく．(彼はいつでも自分の証明――それは大抵突拍子もないものだったが――がデデキントによって承認されてはじめて安心するのだった)．

その手紙の中で対等性の証明のあと，そこだけフランス語で

Je le vois, mais je ne le crois pas!「私は見る．だが信じない」

と書く．

デデキントはカントールの証明を正しいと判断した上で，おそるべき炯眼をもって次のことを指摘する．$\boldsymbol{R}^n$ と $\boldsymbol{R}^p$ は n と p が異なるときも一対一対応するが，一対一双連続な対応は存在しないだろうと．

$\boldsymbol{R}^2$ と $\boldsymbol{R}$ についてデデキントのいうことが正しいことを見よう．

連続双射 $f: \boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ があったとしよう．$\varphi(x)=f(x,0)$ とおけば，$\varphi(x)$ も連続である．$\varphi(0)=a$，$\varphi(1)=b$ とおけば単射性により $a\neq b$．たとえば $a<b$ とする．中間値の定理により $\varphi(x_0)=(a+b)/2$ となる x_0 が 0 と 1 の間にある．

$\psi(y)=f(x_0,y)$ とおけば $\psi(y)$ も連続．$\psi(0)=f(x_0,0)=(a+b)/2$，すなわち $a<\psi(0)<b$．y を 0 でなく十分小さくとれば，連続性から $f(1,y)=b'$，$f(0,y)=a'$ はいくらでも b，a の近くにとれるから，$a'<(a+b)/2<b'$ とできる．このとき $0<x<1$ で $f(x,y)=(a+b)/2$ となる x がとれる．$f(x_0,0)=(a+b)/2$ だったからこれは f の単射性に反する．

7° ベキ集合の濃度

定理　任意の集合 X に対して $|\mathbf{P}(X)|>|X|$（カントール 1890）．

［証明］写像 $x\mapsto\{x\}$ は X から $\mathbf{P}(X)$ への単射だから $|X|\leq|\mathbf{P}(X)|$ は明らか．双射 $f: X\to\mathbf{P}(X)$ があったとする．$x\in X$ に対して $f(x)\in\mathbf{P}(X)$．

$$Y=\{x\,|\,x\in X\wedge x\notin f(x)\}$$

とおくと Y は X の部分集合だから $f(y)=Y$ となるような $y\in X$ がある．ここで $y\notin Y$ すなわち $y\notin f(y)$ ならば，Y の定義から $y\in Y$ となって矛盾する．もし $y\in Y$ ならば同じく Y の定義から $y\notin Y$ となって矛盾する．したがって X から $\mathbf{P}(X)$ への双射は存在しない．　□

集合 X に対し 2^X は X から $2=\{0,1\}$ への写像の全体だとする．すなわち

$$2^X=\{f\,|\,f: X\to\{0,1\}\text{は写像である}\}.$$

このとき $\mathbf{P}(X)\simeq 2^X$．実際 X の部分集合 A と

$$\begin{cases}\chi_A(x)=1 & x\in A\ \text{のとき}\\ \chi_A(x)=0 & x\notin A\ \text{のとき}\end{cases}$$

で定まる A の特性関数 χ_A との対応 $A\mapsto\chi_A$ は $\mathbf{P}(X)$ から 2^X への双射を与える．だから $|\mathbf{P}(X)|$ のことをしばしば $2^{|X|}$ と書く．

$\mathbf{P}(X)\simeq 2^X$ によると上の証明が対角線論法であることがよくわかる．

双射 $f: X\to 2^X$，$x\mapsto f_x\in 2^X$ があったとする．

$$\begin{cases} g(x)=1 & f_x(x)=0 \text{ のとき} \\ g(x)=0 & f_x(x)=1 \text{ のとき} \end{cases}$$

によって $g\in 2^X$ を定義すれば，この g はすべての f_x と異なっている．

連続体仮説 CH (Continuum Hypothesis)：濃度が $|\boldsymbol{N}|$ と $|\boldsymbol{R}|$ の間にある集合は存在しない．

一般連続体仮説 GCH (Generalized Continuum Hypothesis)：任意の無限集合 X に対して，濃度が $|X|$ と $2^{|X|}$ の間にある集合は存在しない．

$2^{\boldsymbol{N}}$ の元は 0, 1 の無限列であり，$[0,1]$ の数の 2 進法小数展開と対応させることによって $\boldsymbol{R}\simeq 2^{\boldsymbol{N}}$ がいえるから，連続体仮説は一般連続体仮説の特別の場合となっている．

8° パラドクス

ブラリ・フォルティ (1897)，カントール (1899，デデキントへの手紙)，ラッセル (発見は1901，公開は1904) とこの時期に次々とパラドクス (逆理) が発見され，人々に衝撃を与えた．たとえばラッセルのパラドクスを本人から伝えられたフレーゲは自分の研究の土台が崩壊するように感じ一時は自分の著書の廃刊を思い，デデキントは自分の著書の再刊を見合わせようとする．

とくにラッセルのパラドクスは条件が少なく簡明であるのでひろく知られ，数学の基礎の危機の時代の到来だと受け取られた．ラッセルから始めよう．

ラッセルのパラドクス．集合 $y=\{x|x\notin x\}$ を考えよう．

y の定義より　　$y\notin y\longrightarrow y\in y$

同じく　$y \in y \longrightarrow y \notin y$

いずれにしても矛盾に陥る.

ブラリ・フォルティのパラドクスは順序数全体からなる集合 On から矛盾が生ずることを主張するものであるが，当時は順序数の定義はあいまいで人によって異なるので今様に説明しよう.

順序数とは推移的で $\in$ に関して整列集合となるものとして定義する（後述）．2つの順序数 α，β の順序は $\alpha < \beta \leftrightarrow \alpha \in \beta$ によって定める．このとき順序数の全体からなる集合 On はやはり推移的で $\in$ に関して整列集合になるから On 自身も順序数となり On の元となる．すなわち $\mathrm{On} \in \mathrm{On}$．このときは $\mathrm{On} < \mathrm{On}$ となって矛盾である.

カントールのパラドクスはすべての集合の集合から矛盾を導くものである.

すべての集合の集合は $v = \{x | x = x\}$ と書かれるから定義される．$\mathbf{P}(v)$ の元はすべて集合であるから v の元である．したがって $\mathbf{P}(v) \subseteq v$．ゆえに $|\mathbf{P}(v)| \leq |v|$．これは $|\mathbf{P}(v)| > |v|$ に矛盾する.

無制限な性質の外延化 $\{x | A(x)\}$ によるものでないパラドクスも続々発見される.

リシャールのパラドクス（1905）．有限個のコトバで定義される自然数 n に関する性質（命題）は高々可算だからこれを番号づけて

$$P_0(n), P_1(n), P_2(n), \ldots, P_n(n), \ldots$$

としよう．このとき n に関する性質 $\neg P_n(n)$ はやはり有限個の文字で定義されるから上のどれかと同値になるはずであるが，もし $\neg P_n(n) \leftrightarrow P_k(n)$ ならば $n = k$ とおくとき，$\neg P_k(k) \leftrightarrow P_k(k)$ となって矛盾である.

ベリーのパラドクス.「16文字以内のフランス語で定義されない最小の自然数」（これは現に16文字以内のフランス語で書ける）.

III　形式主義的公理主義

1°　危機への対応としての公理主義

パラドクスが続出し，基礎の危機が叫ばれる．こうしたとき人は公理化に向かう．確実な基礎の上に立ち，既知のパラドクスから自由で，しかも，これまでの肯定的な成果が全部導かれるような公理系を選ぼうとするのである．算術＝自然数論はすでにペアノによって提唱されていた(1889)．以下の N_1，N_0 はそれを現代風に整理したものである．集合論の公理系はツェルメロによって1908年にはじめて提唱された．

算術の公理系 N_1．

a, b, c, x 等は自然数を動く変数であり，a' は a の次のものすなわち $a+1$ を表わす記号である．

N_1 の公理系

(1)　$\neg(a'=0)$

(2)　$a'=b' \rightarrow a=b$

(3)　$a=b \rightarrow (a=c \rightarrow b=c)$

(4)　$a=b \rightarrow a'=b'$

(5)　$a+0=a$

(6)　$a+b'=(a+b)'$

(7)　$a\cdot 0=0$

(8)　$a\cdot b'=a\cdot b+a$

(9)　$A(a)$ を自然数 a に関する性質とするとき

$A(0) \wedge \forall x(A(x) \rightarrow A(x')) \rightarrow \forall x A(x)$　(数学的帰納法)

N_0 の公理系

N_1の(1)-(8)の他に次の(4′)，(4″)を加える

(4′)　$a=b \rightarrow a+c=b+c$

　　$a=b \rightarrow c+a=c+b$

(4″)　$a=b \rightarrow a\cdot c=b\cdot c$

　　$a=b \rightarrow c\cdot a=c\cdot b$

(9)はなし．次の(10)を加える

(10)　$a=0 \vee \exists x(a=x')$

(9)の性質 $A(a)$ というのは後に論理式として厳密に定義される．それは無限個あるから N_1 の公理系は無限個である．N_0 の公理は有限個だが帰納的関数を各数ごとに表現できる程度に強めてある．N_0 の公理はすべて N_1 の公理から証明できる．

集合論の公理系 Z (Zermelo)．

a, b, c, x, y, z は集合を表わす変数とする．

(1)　外延性公理 (Axiom of Extensionality)

任意の a, b に対して $a=b \leftrightarrow \forall x(x\in a \leftrightarrow x\in b)$．

(2)　等号公理 (Axiom of Equality)

任意の a, b に対し $\forall x(a=b\rightarrow(a\in x\leftrightarrow b\in x))$．

(3)　空集合の公理 (Axiom of Empty set)

空集合 a が存在する．$\forall x(x\notin a)$ となる a が存在する．

(4)　対の公理 (Axiom of Pair)

任意の a, b に対し $c=\{a, b\}$ が存在する．すなわち

$\forall x(x\in c\leftrightarrow x=a\vee x=b)$ となる c が存在する．

(5)　合併の公理 (Axiom of Union)

任意の a に対し $b=\bigcup a$ が存在する．すなわち

$\forall x(x\in b\leftrightarrow \exists y(y\in a\wedge x\in y))$ となる b が存在する．

(6)　ベキ集合の公理 (Axiom of Power)

任意の a に対し $b=\mathbf{P}(a)$ が存在する．すなわち

$\forall x(x\in b\leftrightarrow x\subseteq a)$ となる b が存在する．

ここに $x\subseteq a$ とは $\forall y(y\in x\rightarrow y\in a)$ のことである．

(7)　無限集合の公理 (Axiom of Infinity)

無限集合 a が存在する．これは次のように書かれる．$\emptyset$ を空集合として

$\emptyset\in a\wedge\forall x(x\in a\rightarrow x\cup\{x\}\in a)$ をみたす a が存在する．

(8)　分出公理 (Axiom of Separation)

集合 a と集合 b に関する性質 $A(b)$ に対し $c=\{x|x\in a\wedge A(x)\}$ が存在する．すなわち

$\forall x(x\in c\leftrightarrow x\in a\wedge A(x))$ となる c が存在する．

（9） 選択公理(Axiom of Choice)

任意の集合 a に対し，関数 $f: a\to\bigcup a$ が存在して

$\forall x(x\in a\wedge x\neq\emptyset\to f(x)\in x)$.

［説明］ 公理(3)，(4)，(5)，(6)によって空集合，(4)の c，(5)の b，(6)の b は存在するが，外延性公理によって存在すればただ1つだから，それをそれぞれ $\emptyset$，$\{a,b\}$，$\bigcup a$，$\mathbf{P}(a)$ と書くことにする．

（i） $\{a\}=\{a,a\}$.

（ii） $\langle a,b\rangle=\{\{a\},\{a,b\}\}$ によって順序対 $\langle a,b\rangle$ を定義する．$\bigcup\{a,b\}=a\cup b$ とおく．

（iii） 任意の a，b に対し，$\bigcap a$，$a\times b$ は存在する．

$\bigcap a\subseteq\bigcup a$ だから分出公理によって

$$\bigcap a=\{x|x\in\bigcup a\wedge\forall y\ (y\in a\to x\in y)\}$$

は存在する．

$x\in a$，$y\in b$ ならば，$\{x\}\subseteq a\cup b$，$\{x,y\}\subseteq a\cup b$ だから $\{x\},\{x,y\}\in\mathbf{P}(a\cup b)$．したがって $\langle x,y\rangle=\{\{x\},\{x,y\}\}\subseteq\mathbf{P}(a\cup b)$ だから，$\langle x,y\rangle\in\mathbf{P}(\mathbf{P}(a\cup b))$．ゆえに分出公理によって

$$a\times b=\{z|z\in\mathbf{P}(\mathbf{P}(a\cup b))\wedge\exists x\exists y(z=\langle x,y\rangle\wedge x\in a\wedge y\in b)\}$$

は存在する．

（iv） $\exists!xA(x)$ （$A(x)$をみたす x がただ一つ存在する）を次のように定義する．

$$\exists!xA(x)\overset{\mathrm{D}}{\longleftrightarrow}\exists x(A(x)\wedge\forall y(A(y)\to x=y)).$$

（v） $\mathrm{Fnc}(f: a,b)$ （f は関数 $f: a\to b$ である）．

$$\mathrm{Fnc}(f : a, b) \overset{\mathrm{D}}{\longleftrightarrow} f \subseteq a \times b \wedge \forall x (x \in a \rightarrow \exists ! y (\langle x, y \rangle \in f)).$$

選択公理は正確には次のように書かれる．任意の a に対し

$$\exists f (\mathrm{Fnc}(f : a, \bigcup a) \wedge \forall x (x \in a \wedge x \neq \emptyset \rightarrow f(x) \in x)).$$

a の空でない元(集合)から1個ずつ元を取り出すことができることを要請するものである．

(vi)　集合論の中では自然数は次のように定義される．

$$0 = \emptyset,\ 1 = \{\emptyset\},\ 2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{0, 1\},\ 3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{0, 1, 2\},$$

一般に $n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$．すなわち $n+1 = n \cup \{n\}$．だから無限公理は $0 \in a$, $n \in a \rightarrow n+1 \in a$ を示しており，結局 $N \subseteq a$ を示しているのである．

2° 性質とは何か．証明論の第一歩．項と論理式の定義

自然数論 N_1 の(9)(数学的帰納法)，Z の(8)(分出公理)に現れる性質とは何か？　証明論(ヒルベルトの形式主義的公理主義)の第一歩はまずこれを明らかにすることである．

記号群．はじめに記号ありきというのがヒルベルトの出発点である．まず自然数論 N について述べよう．

(1)　N に固有な言語 (language) L として

(a)　定数記号 0,

(b)　述語記号 $*_1 = *_2$,

(c)　関数記号 $(*)'$,　$*_1 + *_2$,　$*_1 \cdot *_2$,

が与えられている．

(2)　論理記号 $\neg$,　$\vee$,　$\wedge$,　$\rightarrow$,　$\forall$,　$\exists$.

(3)　自然数を表わす変数として

自由変数 $a_0, a_1, a_2, \ldots$ (可算無限個用意する)．

束縛変数 $x_0, x_1, x_2, \ldots$ (可算無限個用意する).

束縛変数は ∀, ∃ とコミにして用いられる.

(4) 補助記号としてカッコ (と).

以上がはじめに前提とされる N の記号である.

N の項(term)の定義

(i) 定数記号 0 と自由変数は項である.

(ii) t_1, t_2 が項ならば $(t_1)'(t_1)+(t_2), (t_1)\cdot(t_2)$ は項である.

(iii) 以上によって定義できるもののみが項である.

論理式(formula)の定義

(i) t_1, t_2 が項のとき $t_1=t_2$ は論理式である. これを原子論理式(atomic formula)という.

(ii) A, B が論理式ならば $\neg(A), (A)\vee(B), (A)\wedge(B), (A)\rightarrow(B)$ は論理式である.

(iii) $A(a)$ が自由変数 a を含む論理式で x が $A(a)$ にあらわれない束縛変数とするとき $\forall x(A(x))$, $\exists x(A(x))$ は論理式である. ここに $A(x)$ は $A(a)$ にあらわれるすべての a を x で置き換えたものである.

(iv) 以上によって定義されるもののみが N の論理式である.

***Z* の論理式**

Z の場合, その言語 L においては (a)定数記号, (c)関数記号は存在せず, (b)述語記号として $*_1=*_2$ と $*_1\in *_2$ をもつ. (2)論理記号, (3)自由変数と束縛変数, (4)カッコは N の場合と同様である. ただし変数は集合を表わすと想定されている.

Z の項は自由変数のみである.

Z の原子論理式は $a=b$ と $a\in b$ の形のものである. ここに a, b は自由変数である. 論理式の定義(ii)-(iv)は N の場合と同様である.

こうして N_1 の(9)における性質 $A(a)$ とは N の論理式であり, Z の分出公理

の $A(a)$ は Z の論理式であるということで一応の問題の決着はつく．

一般の場合，言語 L は

（a）　いくつかの定数記号 c_α $(\alpha \in A)$，

（b）　いくつかの述語記号 p_β $(\beta \in B)$（変数の数が指定されている），

（c）　いくつかの関数記号 f_γ $(\gamma \in C)$（変数の数が指定されている）

が与えられていると考える．論理記号，自由変数および束縛変数，カッコは共通である．

一般の場合の項の定義

（i）　定数記号 c_α および自由変数は項である．

（ii）　f_γ が n 変数の関数記号で，$t_1, \ldots, t_n$ が項ならば，$f_\gamma(t_1, \ldots, t_n)$ は項である．

（iii）　以上によって定義されるもののみが項である．

一般の場合の論理式の定義

（i）　p_β が n 変数の述語記号，$t_1, \ldots, t_n$ が項のとき，$p_\beta(t_1, \ldots, t_n)$ は論理式である．これを原子論理式（atomic formula）という．

（ii）　論理式 A, B から $\neg(A), (A)\vee(B), (A)\wedge(B), (A)\to(B)$ を定義すること，

（iii）　論理式 $A(a)$ から $\forall x(A(x))$，$\exists x(A(x))$ を定義すること，および

（iv）　以上によって定義されるもののみが論理式である，

は N の場合と同様である．

自由変数を含まない論理式を文（sentence）という．

3°　無定義術語

たとえば N における定数や関数とは何か？　いかにして定義されるか？　この問いに対し，ヒルベルトは無定義であると答える．

（1）　数学のような演繹的理論体系における概念を定義によってより根源的なも

のに還元した場合，これ以上他に還元できない概念に到達するのは当然である．

（2） 点とは部分を持たないものであるという定義がユークリッド原論にあるが「部分」なるものの定義はない．またこの定義は効いてこないから無意味である．「相異なる2点を通る直線は唯一つ存在する」といったことが理論に効いてくる公理(ユークリッドでは公準といわれているが)であって，この際，点とは何か，直線とは何かということはどうでもよいことなのだ．

（3） われわれは当然 N での 0 や +,・ についての内容的理解をもっているしイメージをもっている．Z における = や ∈ についても同様である．このことは否定しない．しかしその内容やイメージを(カッコにいれて)使用しないのである．この現象学的還元によってわれわれは「関係」を顕在化するのである．

（4） 基本記号はそれ自身無内容であって，その意味は公理で示された関係を通じて，いやむしろこの公理系から展開される諸結果を通じて陰伏的に(implicit に)示されるのである．

4° パラドクスについて

論理式の概念が明らかになった段階で，すでに見たパラドクスに多少なりとも照明をあてることができる．

（1）**クラスと集合の区別．** Z の任意の論理式 $A(a)$ に対し $A=\{x|A(x)\}$ の形のもの，すなわち

$$\forall x(x\in A\leftrightarrow A(x))$$

をみたす A をクラス(類 class)と呼ぼう．集合 a は $a=\{x|x\in a\}$ と書けるからつねにクラスだが，逆にクラスは必ずしも集合とは限らない．しかしクラス A,B に対してＩで示したのと同様なやり方で $A\subseteq B$，$A=B$，$A\subsetneq B$，$A\cup B$，$A\cap B$，$\bigcup A$，$\bigcap A$ を定義することはできる．この集合とクラスの区別はノイマンに始まり，ベルナイス，ゲーデルに受け継がれることになる．

（2）**パラドクスからの帰結.**

ラッセルのパラドクスからの帰結は次の通りである.

（i）　クラス $\{x|x\notin x\}$ は集合ではない.（ラッセルのパラドクスはこれが集合であるとしたことから矛盾が生じることであった).

ブラリ・フォルティのパラドクスからの帰結

（ii）　「x は順序数である」を表わす Z の論理式を $\mathrm{On}(x)$ と書くとき，クラス $\mathrm{On}=\{x|\mathrm{On}(x)\}$ は集合ではない.

カントールパラドクスからの帰結

（iii）　すべての集合からなるクラス $V=\{x|x=x\}$ は集合ではない. ツェルメロの分出公理は一般の $\{x|A(x)\}$ を集合としたのではパラドクスが生じるので $\boldsymbol{a}$ をある集合とするとき $\{x|x\in a\wedge A(x)\}$ を集合とするという制限である.

リシャールパラドクスからの帰結

a を特定の自由変数とし，a のみを自由変数としてもつ N の論理式を a-論理式と呼ぼう. a-論理式は高々可算だからその全体を

$$A_0(a), A_1(a), \ldots, A_k(a), \ldots$$

としよう. $\boldsymbol{n}$ を自然数とし，$(\cdots((0)')'\cdots)'$（0 の次に $'$ が $\boldsymbol{n}$ 個ついた項）を $\bar{n}$ で表わす. $\boldsymbol{n}$ に対応する数項(numeral)という.

リシャールパラドクスからの結論は次の通りである.

すべての $\boldsymbol{n}$ に対し $\neg A_n(\bar{n})\leftrightarrow A(\bar{n})$ となる a-論理式 $A(a)$ は存在しない.（もしこのような $A(a)$ があれば，それはある $A_k(a)$ であり，$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{k}$ とおくとき矛盾する).

まだ問題が残っている. ある論理式 A が N ないし Z で証明可能とはどういうことかということである. それを明らかにするためには N，Z，その他の公理系に共通な論理の公理と推論規則を示さねばならない. それが第一階術語論理計算と呼ばれるものである.

5° 第1階述語論理計算 (1st order predicate logic calculus)

以下 $A, B, C, A(a)$ は N や Z 等特定の分野における論理式とする．(論理記号の結合力は $\neg$ が一番強く，$\rightarrow$ が一番弱いと考えてカッコを省略してある)．

公理

(1)　$A \rightarrow (B \rightarrow A)$

(2)　$(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C))$

(3)　$A \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B)$

(4)　$A \wedge B \rightarrow A$

(4)′　$A \wedge B \rightarrow B$

(5)　$A \rightarrow A \vee B$

(5)′　$B \rightarrow A \vee B$

(6)　$(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C))$

(7)　$(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$

(8)　$\neg\neg A \rightarrow A$　　　　(8^I)　$\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$

(9)　$A(t) \rightarrow \exists x A(x)$　　(t は項)

(10)　$\forall x A(x) \rightarrow A(t)$　　(t は項)

推論規則

R1　$\dfrac{A, \quad A \rightarrow B}{B}$

R2　$\dfrac{A(a) \rightarrow C}{\exists x A(x) \rightarrow C}$

R3　$\dfrac{C \rightarrow A(a)}{C \rightarrow \forall x A(x)}$

R2, R3 において a は下式にあらわれない．

上にあげた公理と推論規則を総称して H と呼ぶ．(8)の代わりに (8^I) を採用

したものを直観主義述語論理といい H^I で表わす．

上にあげた論理の公理系は Hilbert-Bernays によるものだが，同値な公理系は他にもたくさんある．N や Z を含む考えられるすべての数学の分野で共通に成り立つ公理と推論規則であって多くの数学的経験と試行錯誤の後に結晶したものである．

フレーゲ，ラッセル，ホワイトヘッド，ヒルベルト，アッケルマン，ベルナイスらの努力の結果である．

数学固有の言語以外には日常言語から移入されたコトバとしては

$$\neg,\ \vee,\ \wedge,\ \rightarrow,\ \forall,\ \exists$$

で足りることを最初に指摘したのはフレーゲであった．

論理の法則としては，これだけで十分かという問いに対し，肯定的に答えるのが後述する述語論理の完全性定理である．

今や証明可能とは何であるかを定義することができる．

6° 証明可能

言語 L（定数，関数，述語記号）が与えられると L 上の論理式が確定する．論理式を選んで公理とする．論理式の集合としての公理系を T とする (Theory の T)．特定の公理化された数学は L と T のペア $\langle L, T\rangle$ であらわされる．以下 $\langle L, T\rangle$ としては N と Z を念頭において欲しい．

$A_1, \ldots, A_n, A$ を L 上の論理式とする．$A_1, \ldots, A_n \vdash A$ (in H) (A は仮定 $A_1, \ldots, A_n$ から H において証明可能である) ことを次のように定義する．

次のような L 上の論理式の列 $B_1, \ldots, B_m$ が存在することである．この列を $A_1, \ldots, A_n \vdash A$ (in H) の証明または証明図という．

各 B_i $(1 \leq i \leq m)$ は

(i)　$A_1, \ldots, A_n$ の 1 つであるか，

(ii)　論理の公理(1)-(10)の1つであるか，

(iii)　B_i に先行する2つの論理式 B_j，$B_{j'}$ $(j, j'<i)$ を上式とする R1 による下式であるか，B_i に先行する1つの論理式 B_j $(j<i)$ を上式とする R2, R3 による下式である

(iv)　B_m は A である．

L 上の論理式を A，T を公理系とするとき

$$\mathrm{T}\vdash A\ (A \text{ は公理系 T から証明可能である})$$

とは T の論理式 $A_1, \ldots, A_n$ が存在して

$$A_1, \ldots, A_n \vdash A$$

となることである．

証明自身がここにはじめて対象化された．

数学の形式化を通じて数学自身を対象とする数学すなわち超数学(メタ数学)の誕生である．

7　有限の立場

ある L 上の論理式が性質 α をもつことを証明するのに次の論法がしばしば登場する．(論理式 A の構成に関する帰納法とか A の複雑さに関する帰納法とかいう)．

まず A が原子論理式の場合は性質 α をもつ．A, B が性質 α をもてば $\neg A, A\vee B$, $A\wedge B, A\to B$ も性質 α をもつ．$A(t)$ (t は項) が性質 α をもてば $\forall xA(x)$, $\exists xA(x)$ も性質 α をもつ．ゆえに任意の論理式は性質 α をもつ．またある理論 T に対して $T\vdash A$ なる任意の A が性質 β をもつことをいう場合にも，しばしば $\mathrm{T}\vdash A$ の証明の長さに関する帰納法，あるいは証明における推論規則の個数に関する帰納法を用いる場合がある．これらは直観的にとらえられた自然数（形式的自然数論ではなく）に関する数学的帰納法の拡張であり，何の超越的な仮定も用いられてはおら

ず，ただ有限の記号または記号列に対する操作の有限回のくり返しの思考実験があるのみである．このような思考を有限の立場にあるといい，ヒルベルトは証明論は有限の立場によって扱われるべきだと説いたのである．

Ⅳ　一階述語論理の諸定理

1° H における演繹定理，論理記号の導入除去規則

言語 L が与えられたとき L 上の論理式の有限列を Γ で表わす．

演繹定理 (**Deduction Theorem**) $\Gamma, A \vdash B$ in H (H^I) とする．ただし A にあらわれる自由変数は証明の中で束縛変数に変ることはないとする．このとき $\Gamma \vdash A \rightarrow B$ in H (H^I) である．

［証明］ $\Gamma, A \vdash B$ の証明図の長さ l に関する帰納法で証明する．

$l=1$ のときは B 1 個で証明図になっている場合であるから B は Γ の論理式か公理であるか A であるかであってそのときはすぐわかる．

$l>1$ の場合は次の 3 つの場合を考えればよい．

（i） B が R1 の下式で 2 つの上式が Γ, A から証明可能のとき．

（ii） B が R2 の下式 $\exists x P(x) \rightarrow C$ で，上式 $P(a) \rightarrow C$ が Γ, A から H (H^I) で証明可能のとき．

（iii） B が R3 の下式 $C \rightarrow \forall x P(x)$ で，上式 $C \rightarrow P(a)$ が Γ, A から H (H^I) で証明可能のとき．

ここで帰納法の仮定によって，上式については演繹定理を仮定して $\Gamma \vdash A \rightarrow B$ in H (H^I) を導くのである．たとえば（ii）の場合，$\Gamma \vdash A \rightarrow (P(a) \rightarrow C)$ を仮定するのであるが，$A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash B \rightarrow (A \rightarrow C)$ が成り立つので，$\Gamma \vdash P(a) \rightarrow (A \rightarrow C)$ in H (H^I) となる．a は B すなわち $\exists x P(x) \rightarrow C$ への証明中で束縛変数に変るから仮定によって A にはあらわれず，したがって

$$\frac{P(a) \rightarrow (A \rightarrow C)}{\exists x P(x) \rightarrow (A \rightarrow C)}\ \mathrm{R2}$$

が成立ち，$A \rightarrow (\exists x P(x) \rightarrow C)$ も証明可能になるのである．といった風に証明する． □

導入除去規則とは

導入（$\vdash$の右に記号が入ること）	除去（$\vdash$の左に記号が入ること）
$\neg$　$\Gamma, A\vdash B$ かつ $\Gamma, A\vdash \neg B$ (Aの自由変数は不変) ならば $\Gamma\vdash \neg A$	$\neg$　$\neg\neg A\vdash A$ in H
$\vee$　$A\vdash A\vee B$　$B\vdash A\vee B$	$\vee$　$\Gamma, A\vdash C$ かつ $\Gamma, B\vdash C$ (A, B の自由変数は不変) ならば $\Gamma, A\vee B\vdash C$
$\wedge$　$A, B\vdash A\wedge B$	$\wedge$　$A\wedge B\vdash A$　$A\wedge B\vdash B$

H は実際に証明を作るのには便利というわけではない．たとえば $\vdash A\rightarrow A$ in H の証明は次のように作る．

$$\dfrac{\overset{(\mathrm{H1})}{A\rightarrow((A\rightarrow A)\rightarrow A)} \qquad \dfrac{\overset{(\mathrm{H1})}{A\rightarrow(A\rightarrow A)} \qquad \overset{(\mathrm{H2})}{(A\rightarrow A))\rightarrow((A\rightarrow((A\rightarrow A)\rightarrow A)\rightarrow(A\rightarrow A))}}{(A\rightarrow((A\rightarrow A)\rightarrow A))\rightarrow(A\rightarrow A)}\,\mathrm{R1}}{A\rightarrow A}\,\mathrm{R1}$$

そこでもっと扱いやすいゲンツェンの LK，LJ を紹介しよう．

2° ゲンツェン (Gentzen) の LK，LJ

式列 (sequent) $A_1, \ldots, A_n$，$B_1, \ldots, B_m$ を L 上の論理式とするとき，

$$A_1, \ldots, A_n \longrightarrow B_1, \ldots, B_m$$

の形のものを式列という．$\longrightarrow$の両辺は空であってもよい．以下 $\Gamma, \Theta, \Lambda, \Delta$ などギリシャ大文字は論理式の有限列(空でもよい)を表わすとする．

（1）　公理(始式)

$$A\longrightarrow A \quad (A \text{ は論理式})$$

（2）　LK の推論規則(推論図)

構造に関する推論

$$\frac{\Gamma\longrightarrow\Theta}{A, \Gamma\longrightarrow\Theta}\text{ 増左} \qquad\qquad \frac{\Gamma\longrightarrow\Theta}{\Gamma\longrightarrow\Theta, A}\text{ 増右}$$

$$\frac{A, A, \Gamma \rightarrow \Theta}{A, \Gamma \rightarrow}\ \text{減左} \qquad \frac{\Gamma \rightarrow \Theta, A, A}{\Gamma \rightarrow \Theta, A}\ \text{減右}$$

$$\frac{\Delta, A, B, \Gamma \rightarrow \Theta}{\Delta, BA, \Gamma \rightarrow \Theta}\ \text{換左} \qquad \frac{\Gamma \rightarrow \Theta, A, B, \Lambda}{\Gamma \rightarrow \Theta, B, A, \Lambda}\ \text{換右}$$

論理記号に関する推論規則

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Theta, A}{\neg A, \Gamma \rightarrow \Theta}\ \neg\text{左} \qquad \frac{A, \Gamma \rightarrow \Theta}{\Gamma \rightarrow \Theta, \neg A}\ \neg\text{右}$$

$$\frac{A, \Gamma \rightarrow \Theta}{A \wedge B, \Gamma \rightarrow \Theta}\ \wedge\text{左}_1 \qquad \frac{\Gamma \rightarrow \Theta, A}{\Gamma \rightarrow \Theta, A \vee B}\ \vee\text{右}_1$$

$$\frac{B, \Gamma \rightarrow \Theta}{A \wedge B, \Gamma \rightarrow \Theta}\ \wedge\text{左}_2 \qquad \frac{\Gamma \rightarrow \Theta, B}{\Gamma \rightarrow \Theta, A \vee B}\ \vee\text{右}_2$$

$$\frac{A, \Gamma \rightarrow \Theta \quad B, \Gamma \rightarrow \Theta}{A \vee B, \Gamma \rightarrow \Theta}\ \vee\text{左} \qquad \frac{\Gamma \rightarrow \Theta, A \quad \Gamma \rightarrow \Theta, B}{\Gamma \rightarrow \Theta, A \wedge B}\ \wedge\text{右}$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Theta, A \quad B, \Delta \rightarrow \Lambda}{A \rightarrow B, \Gamma, \Delta \rightarrow \Theta, \Lambda}\ \rightarrow\text{左} \qquad \frac{A, \Gamma \rightarrow \Theta, B}{\Gamma \rightarrow \Theta, A \rightarrow B}\ \rightarrow\text{右}$$

$$\frac{A(a), \Gamma \rightarrow \Theta}{\exists x A(x), \Gamma \rightarrow \Theta}\ \exists\text{左}$$

a は下式列にあらわれない．a を固有変数（eigen variable）という

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Theta, A(t)}{\Gamma \rightarrow \Theta, \exists x A(x)}\ \exists\text{右}$$

t は項

$$\frac{A(t), \Gamma \rightarrow \Theta}{\forall x A(x), \Gamma \rightarrow \Theta}\ \forall\text{左}$$

t は項

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Theta, A(a)}{\Gamma \rightarrow \Theta, \forall x A(x)}\ \forall\text{右}$$

a は下式列にあらわれない．a を固有変数（eigen variable）という

→ 左右における $\neg A$, $\wedge$ 左右における $A \wedge B$, $\vee$ 左右における $A \vee B$, → 左右における $A \rightarrow B$ を各推論図における主論理式（principal formula）といい，そこでの A, B を副論理式（auxiliary formula）という．

∃左，∀右においては $\exists x A(x)$, $\forall x A(x)$ が主論理式，$A(a)$ が副論理式であ

り，∀左，∃右では $\forall xA(x)$，$\exists xA(x)$ が主論理式，$A(t)$ が副論理式である．

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Theta, A \quad A, \Delta \rightarrow \Lambda}{\Gamma, \Delta \rightarrow \Theta, \Lambda}\ \text{カット}$$

LJ. LK において式列の右辺は空であるか，ただ 1 個の論理式のみからなるという制限をおいたもの．このとき

$$\frac{\Gamma \rightarrow A}{\neg A, \Gamma \rightarrow}\ \neg\text{左} \qquad \frac{A, \Gamma \rightarrow}{\Gamma \rightarrow \neg A}\ \neg\text{右} \qquad \frac{\Gamma \rightarrow}{\Gamma \rightarrow A}\ \text{増右}$$

であって，換右，減右はない．

LK (LJ) の証明図

S を式列とする．S の LK における証明図とは次の条件をみたす図形（式列と横棒 — からなる）のことである．

（i） S 以外の式列はある推論の上式である．

（ii） すべての式列はたかだか 1 つの推論の上式である．

（iii） いかなる式列の下式列にもならない式列は $A \rightarrow A$ の形である．

S の証明図があるとき，S は LK で証明可能であるといい，$\vdash S$ in LK と書く．LJ に関しても同様で，推論を LJ の推論に制限したものである．

3° H と LK，H^I と LJ の関係

F を特定の文，Θ は列 $B_1, \ldots, B_m$ $(m \geq 0)$ とする．Θ'，Θ'' を次のように定義する．

$$\Theta' = \begin{cases} B_1, \ldots, B_{m-1} & (m>1\ \text{のとき}) \\ \text{空列} & (m \leq 1\ \text{のとき}) \end{cases}$$

$$\Theta'' = \begin{cases} B_m & (m \geq 1\ \text{のとき}) \\ \neg(F \rightarrow F) & (m=0\ \text{すなわち}\ \Theta\ \text{が空のとき}) \end{cases}$$

つまり

Θ が $B_1, \ldots, B_m$ $(m \geq 2)$ のとき,	Θ' は $B_1, \ldots, B_{m-1}$	Θ'' は B_m
Θ が B_1 のとき,	Θ' は空	Θ'' は B_1
Θ が空のとき,	Θ' は空	Θ'' は $\neg(F \to F)$

［説明］ $\longrightarrow$(両側が空である式列) からは任意の論理式 A に対して, 増右によって $\longrightarrow A$ が出るから, 矛盾を生じることを意味する. $\longrightarrow$ の代わりに矛盾命題を用いて $\longrightarrow \neg(F \to F)$ と書くのである.

定理 H(H^I) と LK (LJ) の同等性.

(a) Γ は論理式の列, E を論理式とする. もし $\Gamma \vdash E$ in H (ないし H^I)で Γ から E の証明において, Γ の論理式の自由変数が束縛変数に変らない (以下このことを単に Γ の自由変数は不変という) ならば, $\Gamma \longrightarrow E$ in LK (ないし LJ) である.

(b) Γ, Θ は論理式の列で, $\vdash \Gamma \longrightarrow \Theta$ in LK (ないし LJ) ならば, $\Gamma, \neg\Theta' \vdash \Theta''$ in H (ないし H^I) で Γ, $\neg\Theta'$ の自由変数は不変である. とくに $\vdash \Gamma \longrightarrow E$ in LK (LJ) ならば, $\Gamma \vdash E$ in H(H^I) で Γ のすべての自由変数は不変である.

［(a)の証明の概略］ $\Gamma \vdash E$ in H(H^I) で E が Γ の論理式の1つの場合.

$$\frac{E \longrightarrow E}{\Gamma \longrightarrow E}\ 増左$$

だから $\vdash \Gamma \longrightarrow E$ in LJ である.

E が H の公理のとき, $\vdash \longrightarrow E$ in LK(8)以外は $\vdash \longrightarrow E$ in LJ であることをいう. (このときは増左でいえる). そのために $\vdash A, A \to B \longrightarrow B$ in LJ を用いる.

$$\cfrac{\cfrac{A \longrightarrow A \quad B \longrightarrow B}{A \to B, A \longrightarrow B}\ \to左}{A, A \to B \longrightarrow B}\ 換左$$

たとえば公理(2)

$$
\begin{array}{cl}
A \longrightarrow A \qquad B, B\to C \longrightarrow C & \\ \hline
A\to B, A, B\to C \longrightarrow C & \to\text{左} \\ \hline\hline
A \longrightarrow A \qquad B\to C, A, A\to B \longrightarrow C & \text{換左} \\ \hline
A\to (B\to C), A, A, A, \to B \longrightarrow C & \to\text{左} \\ \hline\hline
A, A\to B, A\to (B\to C) \longrightarrow C & \text{減左，換左} \\ \hline
A\to B, A\to (B\to C) \longrightarrow A\to C & \to\text{右} \\ \hline\hline
A\to B \longrightarrow (A\to (B\to C)) \to (A\to C) & \text{換左，}\to\text{右} \\ \hline
\longrightarrow (A\to B)\to ((A\to (B\to C))\to (A\to C)) &
\end{array}
$$

たとえば公理(6)

$$
\begin{array}{cl}
\dfrac{\dfrac{A, A\to C \longrightarrow C}{A, A\to C, B\to C \longrightarrow C}\,\text{増，換} \qquad \dfrac{B, B\to C \longrightarrow C}{B, A\to C, B\to C \longrightarrow C}\,\text{増，換}}{A\vee B, A\to C, B\to C \longrightarrow C} & \vee\text{左} \\ \hline
A\to C, B\to C \longrightarrow A\vee B\to C & \to\text{右} \\ \hline\hline
A\to C \longrightarrow (B\to C)\to (A\vee B\to C) & \text{換，}\to\text{右} \\ \hline\hline
\longrightarrow (A\to C)\to ((B\to C)\to (A\vee B\to C)) &
\end{array}
$$

E が推論規則の下式のとき上式に対して定理が成り立つと仮定して下式についても成り立つことをいう．

［(b)の証明の概略］$\vdash \Gamma \longrightarrow \Theta$ in LK (LJ) ならば，$\Gamma, \neg \Theta' \vdash \Theta''$ in H (H^I) で $\Gamma, \neg \Theta'$ の自由変数は不変であることを $\Gamma \longrightarrow \Theta$ の LK (LJ) における証明図の高さに関する帰納法で証明する．証明図の高さとは，始式だけの証明図の高さは 1，最後の推論が $\dfrac{S'}{S}$ で S' への証明 P' の高さを $h(P')$ とするとき，S までの証明 P の高さ $h(P)=h(P')+1$，$\dfrac{S_1 \quad S_2}{S}$ で S_1，S_2 までの証明を P_1，P_2，S までの証明を P とするとき P の高さ $h(P)=\max(h(P_1), h(P_2))+1$ で定めるのである．

高さが 1 のときは $C \longrightarrow C$ だから $C \vdash C$ in H (H^I) は明らか．

例として

$$
\frac{A, \Gamma \longrightarrow \Theta}{\Gamma \longrightarrow \Theta, \neg A}\ \neg\text{右}
$$

の場合を見る．Θ が空のときは上式に関する帰納法の仮定により $A, \Gamma \vdash \neg(F\to F)$

in H (H^I), A, Γ の自由変数は不変．一方 $A, \Gamma \vdash F \to F$ in H^I だから，$\neg$ 導入により $\Gamma \vdash \neg A$ in H (H^I) (自由変数は不変)．したがって，下式に対する定理が成り立つ．

Θ が空でないときは，上式に関する帰納法の仮定より $A, \Gamma, \neg\Theta' \vdash \Theta''$ (自由変数は不変)．$A, \Gamma, \neg\Theta, \neg\Theta'' \vdash \neg\Theta''$ だから，$\neg$ 導入によって $\Gamma, \neg\Theta', \neg\Theta'' \vdash \neg A$ すなわち $\Gamma, \neg\Theta \vdash \neg A$ すなわち下式に対する定理が成り立つ．

こういう具合に一つ一つの推論について上式について定理が成立てば下式についても成り立つことをいうのである．

4° LKの基本定理

LK の基本定理とは次の 2 つの定理，カット消去定理 (Cut-elimination theorem) と中間式定理 (Mid sequent theorem) を指す．ともにゲンツェン (1935) の結果である．

カット消去定理　式列 S にいたる LK (または LJ) の証明があれば，同じ S にいたるカットなしの証明図がある．

中間式定理　LS で証明可能な式列 S でそれが prenex 型のもののみからなっているとする．そのとき次の条件をみたす S のカットなしの証明がある．中間式 S' が存在する．すなわち

（i）　S' は量記号（$\forall$ と $\exists$）をもたない．

（ii）　S' の下の推論図は構造に関する推論図か $\forall$，$\exists$ の推論図（これを述語推論図という）のみからなる．

（iii）　S' の上の推論図は構造に関する推論図か $\neg$，$\vee$，$\wedge$，$\to$ の推論図（これを命題推論図という）のみからなる．

ここに論理式が prenex（量記号先行）型であるとは，すべての量記号が先頭に並んでいる論理式のこと．すなわち

$$Q_1 x_1 \cdots Q_n x_n A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$(Q_1, \ldots, Q_n$ は $\forall$ または $\exists$ であって，$A(x_1, \ldots, x_n)$ には $\exists$，$\forall$ はあらわれない)の形の論理式のことである．($n=0$ つまり $\exists$，$\forall$ をもたない論理式も prenex 型とみなす)．

なお任意の論理式は $\leftrightarrow$ の意味で prenex 型の論理式に同値である．詳しい証明はここでは述べない．ぜひとも1巻Ⅰ章か，後に紹介する参考文献を見ていただきたいが基本方針だけ概略を述べておこう．

次の mixture と呼ばれる推論図を考える．

$$\frac{\Gamma \to \Delta \quad \Pi \to \Lambda}{\Gamma, \Pi^* \to \Delta^*, \Lambda}\ \mathrm{mix}\,(D)$$

ここに Π，Δ は D を含んでおり，Π^*，Δ^* は Π，Δ から D をすべて取り除いたものである．次に見るようにカットとミックスは同値であるが，カット消去定理をいうにはカットなしミックスつきの証明図が与えられたとき，同じ終式にいたるミックスなしの証明図が存在することをいえばよい．また，これには最後の推論だけが mix の場合についていえば十分である．

mix はカットによって得られる．

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \to \Delta}{\Gamma \to \Delta^*, D}\ \text{換減} \qquad \dfrac{\Pi \to \Lambda}{D, \Pi^* \to \Lambda}\ \text{換減}}{\Sigma, \Pi^* \to \Delta^*, \Lambda}\ \text{カット}$$

カットは mix によって得られる．

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \to \Delta, D \quad D, \Pi \to \Lambda}{\Gamma, \Pi^* \to \Delta^*, \Lambda}\ \mathrm{mix}\,(D)}{\Gamma, \Pi \to \Delta, \Lambda}\ \text{増換}$$

論理式 D の degree とは，D に含まれる論理記号の数(重複して数える)をいう．mix の degree とは mix-式 D の degree のことだとする．

証明図における糸とは，始式から終式にいたる式列の列をいう．mix を $\dfrac{S_1 \quad S_2}{S}$ とするとき，S_1 を含む糸を左の糸，S_2 を含む糸を右の糸という．S_1 の右辺には D

が含まれるが，糸を上にたどって行くと S_0 においてはじめて S_0 の上の式列の右辺には D があらわれないような S_0 がある．(始式を考えればこのような S_0 は必ずある)．この糸における式列の数（S_0 と S_1 を含めて）をこの糸の rank という．右糸についても同様に rank を定義する．

R_l を左糸の rank の最大値，R_r を 右糸の rank の最大値とし，$R=R_l+R_r$ を mix で終る証明図の rank という．$R\geq 2$ である．

mix の消去定理は mix の degree g と rank R に関する二重帰納法で証明される．すなわち，まず $R=2$ の場合，g に関する帰納法で証明し，次に $R>2$ の場合 R より小さい rank をもつ場合には，任意の g に対して成り立つと仮定して rank が R の場合にも成り立つことをいう．

中間式定理は証明図の位数（述語論理図の下にある命題推論図の個数の和）に関する帰納法で証明する．すなわち，まず位数が 0 のとき mid sequent が存在し，任意の位数に対してそれより小さい位数をもつ同じ終式にいたる証明図が作れることをいうのである．

Ⅳ章に関する基本文献

すでに引用した Hilbert, Bernays と Gentzen のものは

- Hilbert and Bernays, *Grundlagen der Mathematik* 1, Berlin (Springer), 1934
- Gerhard Gentzen, *Untersuchungen über das logische Schliessen*, Math. Zeitschrift, vol. 37 (1934-35), pp. 176-210, 405-431

幸い邦書にも良書が多い．

- 竹内，八杉「証明論入門」共立（1988）（竹内「数学基礎論」を改題補充したもの）
- 松本和夫「数理論理学」共立（1970）
- 前原昭二「数理論理学」培風館（1973）

• 大芝　猛「数学基礎概説」共立（1987）

他に

• ヒルベルト・アッケルマン「記号論理学の基礎」伊藤誠訳，大阪教育図書（1959）

ヒルベルトの形式主義的公理主義，証明論の目標はさまざまな数学の公理系の無矛盾性の証明であった．ヒルベルトは1900年の有名なパリ講演において23個の未解決問題をあげたが，

第１にあげた問題が連続体問題，

第２にあげた問題が算術の無矛盾性であった．

算術＝自然数論の無矛盾性は1936，1938年に Gentzen によって証明された．それは最初の ϵ 数までの超限帰納法を用いるものであった．（竹内・八杉にある）．

竹内は高階論理におけるカット消去定理（実数論の無矛盾性が帰結する）を Ordinal Diagram を用いて証明したが，この結果を含む証明論の集大成が

• Takeuti, Proof Theory, North-Holland Pub. Co. である．

V　命題論理計算

1°　命題論理計算

（1）命題論理式

命題変数と呼ばれる可算個の文字 $X_1, X_2, \ldots$ が与えられ，これから出発して $\neg(A)$，$(A)\vee(B)$，$(A)\wedge(B)$，$(A)\rightarrow(B)$ によって作られるものを命題論理式として定義する．カッコは$\neg$結合が最も強く，$\rightarrow$結合が最も弱いとして適当に省略する．

（2）公理と推論規則

公理は H の(1)-(8)のみ．ただし，そこでの A，B，C は命題論理式とする．推論規則は R1 のみ．この系を H_0 と書く．(8)の代りに (8^I) をとったものを H_0^I と書く．

$A_1, \ldots, A_n \vdash A$ in $\mathrm{H}_0\,(\mathrm{H}_0^I)$ は，$A_1, \ldots, A_n$，A は命題論理式であって，仮定 $A_1, \ldots,$ A_n から $\mathrm{H}_0\,(\mathrm{H}_0^I)$ の公理と推論規則 R1 のみから証明されることを指す．H_0 において演繹定理，導入・除去規則が成り立つ．

論理式を命題論理式に限定し，推論図を構造推論図，命題推論図，カットに限定した LK と LJ を LK_0，LJ_0 と書く．もちろん H_0 と LK_0（H_0^I と LJ_0）の同値性が成り立つ．たとえば $\vdash A$ in $\mathrm{H} \Longleftrightarrow \vdash \longrightarrow A$ in LK_0.

2°　命題論理式とブール関数

（1）ブール関数

$\{0,1\}^n$ を $0,1$ のみからなる長さ n の列の全体とする．（全部で 2^n 個ある）．$\{0,1\}^n$ から$\{0,1\}$への関数 $f\colon\{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$を n 変数ブール関数という．（全部で 2^{2^n} 個ある）．

（2） 命題論理式の定めるブール関数

$X_1, \ldots, X_n$ 以外に命題変数を持たない命題論理式 A に対し，$X_1, \ldots, X_n$ に 0, 1 の n 列 $e_1, \ldots, e_n$ を代入すると真偽表を通じて A の値 0 か 1 が定まる．すなわち A は 1 つのブール関数を定める．これを $\widetilde{A}$ と書く．

真偽の代りに 1, 0 とした真偽表を念のために書いておくと

X	$\neg X$
1	0
0	1

X_1	X_2	$X_1 \vee X_2$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

X_1	X_2	$X_1 \wedge X_2$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

X_1	X_2	$X_1 \rightarrow X_2$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

2 つの n 変数ブール関数 f, f' は，すべての $(e_1, \ldots, e_n) \in \{0, 1\}^n$ に対して値が等しいとき $f \equiv f'$ と書く．

（3） **定理 1．** 任意の変数ブール関数は命題論理式によって次の意味で表現される．すなわち，任意の n 変数ブール関数 f に対し，ある命題論理式 F があって $f \equiv \widetilde{F}$.

［証明］ n に関する帰納法で証明する．

$n=1$ のとき，ブール関数は次の 4 つであり，いずれも命題論理式で表現される．

X	$f(X)$
0	0
1	1

$f(X) = X$

X	$f(X)$
0	1
1	0

$f(X) = \neg X$

X	$f(X)$
0	0
1	0

$f(X) = X \wedge \neg X$

X	$f(X)$
0	1
1	1

$f(X) = X \vee \neg X$

n 変数のとき定理が成り立つとし，$n+1$ 変数ブール関数 $f(X_1, \ldots, X_n X_{n+1})$

が与えられたとする．

$$f_1(X_1, \ldots, X_n) = f(X_1, \ldots, X_n, 1), \quad f_2(X_1, \ldots, X_n) = f(X_1, \ldots, X_n, 0)$$

とおくと f_1，f_2 は n 変数だから帰納法の仮定によって，命題論理式 F_1，F_2 によって表現される．しかるに

$$f(X_1, \ldots, X_n X_{n+1}) \equiv (X_{n+1} \wedge f_1(X_1, \ldots, X_n)) \vee (\neg X_{n+1} \wedge f_2(X_1, \ldots, X_n))$$

である．なぜなら $X_{n+1}=1$ のとき，右辺は f_1 に等しく，$X_{n+1}=0$ のときは f_2 に等しいからである．F として $(X_{n+1} \wedge F_1) \vee (\neg X_{n+1} \wedge F_2)$ とおけば，これは $f(X_1, \ldots, X_n, X_{n+1})$ を表現する．

3° 連言標準形と選言標準形

（1）連言標準形

X_i を命題変数，e を 0 または 1 とするとき，X_i^e を次のように定義する．

$$X_i^e = \begin{cases} X_i & e=1 \text{ のとき} \\ \neg X_i & e=0 \text{ のとき} \end{cases}$$

X_i^e の X_i に e'（0 か 1）を代入したものを $(e')^e$ と書くとき

$$(e')^e = 1 \Longleftrightarrow e = e'$$

$$(e')^e = 0 \Longleftrightarrow e \neq e' \quad (e' = 1-e)$$

であることに注意しよう．

$(e_1, \ldots, e_n) \in \{0, 1\}^n$ に対して $X_1^{e_1} \wedge \cdots \wedge X_n^{e_n}$ の形の式を $X_1, \ldots, X_n$ の連言項といい，$X_1^{e_1} \vee \cdots \vee X_n^{e_n}$ の形の式を $X_1, \ldots, X_n$ の選言項という．

（2）$\bigvee_j (C_j)$（C_j は $X_1, \ldots, X_n$ の連言項）の形の式を $X_1, \ldots, X_n$ の選言標準形 (Disjunctive Normal Form) または積和標準形（積の和の意味）といい，$\bigwedge_j (D_j)$（D_j は $X_1, \ldots, X_n$ の選言項）の形の式を $X_1, \ldots, X_n$ の連言標準形 (Conjunctive Normal Form) または和積標準形（和の積の意味）という．

（3）**定理 2．** 恒偽でない（恒真でない）任意の命題論理式 A に対し選言（連言）標準形の論理式 A' があって $\vdash A \leftrightarrow A'$ in H_0.

［証明］次の各論理式は H_0 で証明可能である．

（1）	$(A \to B) \longleftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$	
（2）	$\neg(A \vee B) \longleftrightarrow \neg A \wedge \neg B$	ド・モルガン則
（2）′	$\neg(A \wedge B) \longleftrightarrow \neg A \vee \neg B$	ド・モルガン則
（3）	$A \wedge (B \vee C) \longleftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	分配則
（3）′	$A \vee (B \wedge C) \longleftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$	分配則
（4）	$A \longleftrightarrow \neg\neg A$	二重否定の法則

LK_0 でこれらが成り立つことを確かめよ．

［定理の証明］A を与えられた命題論理式とする．まず（1）によって $A \to B$ を $\neg A \vee B$ で置き換え，A を $\neg$，$\vee$，$\wedge$ のみを用いて作られる式に変形する．次に，ド・モルガン則を用いて $\neg$ を内側へ内側へと移す．その結果 $\neg$ はすべて命題変数につくようにする．このとき $\neg\neg$ があらわれると二重否定の法則を用いてこれを取り除く．この結果，命題変数 X_i とその否定 $\neg X_i$ から $\vee$，$\wedge$ のみによって作られる式に変形できる．あとは分配法則により $\vee$ は $+$，$\wedge$ は $\times$ と考えて，$a \times (b+c) = a \times b + a \times c$ の計算と同様にして連言項を $\bigvee$ でつないだものができる．X_i と $\neg X_i$ がともにあらわれれば，$X_i \wedge \neg X_i$ は 0 だからこれを取り除く．

すべての連言項が $X_i \wedge \neg X_i$ の形のものを含むときは，この式は常に偽な式になるが，このときは A は $\bigvee_{i=1}^{n}(X_i \wedge \neg X_i)$ の形の式に同値（$\leftrightarrow$ の意味で）になる（定理 3）．

連言項 C にある X_j があらわれなければ

$$C \longleftrightarrow C \wedge (X_j \vee \neg X_j) \longleftrightarrow (C \wedge X_j) \vee (C \wedge \neg X_j)$$

を用いて X_j があらわれるようにできる．

$\vee, \wedge$ を $\times, +$ のように考えて分配法則を用いれば，常に真となる式でない限り連言標準形に同値になる．つねに真な式は $\bigwedge_{i=1}^{n}(X_i \vee \neg X_j)$ に同値になる（定理 3）．

上述した変形には事実上次の補題が用いられていることに注意しよう.

$C(A)$ が A を含む式であるとき $\vdash A \leftrightarrow A'$ in H_0 ならば, $\vdash C(A) \leftrightarrow C(A')$ in H_0. しかしこれは $C(A)$ の A からの構成に関する帰納法で証明できることは結局次のことへ還元できることからわかる.

$$A \to A' \longrightarrow \neg A' \to \neg A$$

$$A \to A' \longrightarrow B \wedge A \to B \wedge A'$$

$$A \to A' \longrightarrow B \vee A \to B \vee A'.$$

4° 恒真式

命題論理式 A に対応するブール関数 $\tilde{A}$ の値がつねに 1 のとき, A は恒真であるという.

定理 3. 命題論理式 A に対し

(1) $\vdash A$ in H_0 ならば A は恒真である.

(2) (命題論理の完全性定理 Post 1921). A が恒真なら $\vdash A$ in H_0 である.

[証明] (1) 公理(1)-(8)は恒真式であり. A, $A \to B$ が恒真なら B も恒真である. □

(2) A を恒真とし, $\bigvee_j C_j$ をその選言標準形とする. (A は常に偽ではないから各項が消えてなくなることはない). このとき任意の $(e_1, \ldots, e_n) \in \{0, 1\}^n$ に対して $X_1^{e_1} \wedge \cdots \wedge X_n^{e_n}$ はある C_j としてあらわれる. そうでなければ, ある $(e_1, \ldots, e_n) \in \{0, 1\}^n$ があって, 任意の連言項 $C_j = X_1^{e_1'} \wedge \cdots \wedge X_n^{e_n'}$ に対し, $e_i \neq e_i'$ となる i があるが, このときは $X_1, \ldots, X_n$ に $e_1, \ldots, e_n$ を代入した結果はすべての C_j を 0 にし, $\bigvee_j C_j$ も 0 になって恒真という仮定に反する. ゆえに

$$A \longleftrightarrow \bigvee_{(e_1, \ldots, e_n) \in \{0,1\}^n} X_1^{e_1} \wedge X_2^{e_2} \wedge \cdots \wedge X_n^{e_n}$$

となるが, 右辺 $\leftrightarrow \bigwedge_{i=1}^n (X_i \vee \neg X_i)$ であって, これは H_0 で証明可能である. □

VI　スコーレムの定理と完全性定理

1°　モデル

（1）言語の解釈

言語 $\mathrm{L}=\{c_\alpha, p_\beta, f_\gamma\}$（$\alpha\in A$, $\beta\in B$, $\gamma\in C$ の指定はしばしば省略する）の解釈，構造（structure）または枠（frame）とは $M=\langle D, c_\alpha^M, p_\beta^M, f_\gamma^M\rangle$ のことであって，ここに D はある集合，c_α^M は D のある元，f_γ^M は f_γ が n 変数のときある関数 f_γ^M：$D^n\to D$, p_β^M は p_β が n 変数のときは D^n 上の述語 p_β^M：$D^n\to\{$真，偽$\}$だが，ふつうこの代りに集合$\{\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \mid p_\beta^M(x_1, \ldots, x_n)=$真$\}$を考えて $p_\beta^M\subseteq D^n$ として定める．

（2）付値

自由変数 $a_1, \ldots, a_n$ に D の元を対応させる指定（assignment）または付値（evaluation）を

$$e=\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \\ x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix},\ \text{または}\ x_i=e(a_i)$$

と書く．

（3）項の解釈

項 t，または論理式 φ が付値 e で指定される自由変数のみを含むとき「e は t または φ を覆う」という．e が t を覆うとき，M, e による t の解釈 $t^M[e]$ を次のように定義する．

（i）　t が定数 c_α のとき，$t^M[e]=c_\alpha^M$.

（ii）　t が自由変数 a_i で e が a_i を覆うとき，$t^M[e]=e(a_i)$.

（iii）　t が $f_\gamma(t_1, \ldots, t_n)$ で e が $t_1, \ldots, t_n$ を覆うとき，$t^M[e]=f_\gamma^M(t_1^M[e], \ldots, t_n^M[e])$.

e が t を覆うとき $t^M[e] \in D$ は明らか.

(4) 論理式の解釈

e が論理式 φ を覆うとき，$M \vDash \varphi[e]$ を次のように定義する.

(i) φ が原子論理式 $p_\beta(t_1, \ldots, t_n)$ で e が $t_1, \ldots, t_n$ を覆うとき,

$$M \vDash \varphi[e] \Longleftrightarrow \langle t_1^M[e], \ldots, t_n^M[e] \rangle \in p_\beta^M,$$

(ii) e が φ を覆うとき,

$$M \vDash \neg \varphi[e] \Longleftrightarrow M \vDash \varphi[e] \text{ でない},$$

e が φ, ψ を覆うとき,

(iii) $M \vDash (\varphi \wedge \psi)[e] \Longleftrightarrow M \vDash \varphi[e]$ かつ $M \vDash \psi[e]$,

(iv) $M \vDash (\varphi \vee \psi)[e] \Longleftrightarrow M \vDash \varphi[e]$ または $M \vDash \psi[e]$,

(v) $M \vDash (\varphi \rightarrow \psi)[e] \Longleftrightarrow M \vDash \varphi[e]$ でないか $M \vDash \psi[e]$,

付値 $e = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \\ x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$ と $a_1, \ldots, a_n$ と異なる自由変数 b に対し，付値

$$e' = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n & b \\ x_1 & \cdots & x_n & x \end{pmatrix}$$

のことを $e\binom{b}{x}$ と書く. $\forall x\varphi(x)$, $\exists x\varphi(x)$ に対し e がこれを覆うとき $\forall x\varphi(x)$, $\exists x\varphi(x)$ にふくまれない自由変数を b とする.

(vi) $M \vDash \forall x\varphi(x)[e] \Longleftrightarrow$ すべての $x \in D$ に対し $M \vDash \varphi(b)[e\binom{b}{x}]$,

(vii) $M \vDash \exists x\varphi(x)[e] \Longleftrightarrow$ ある $x \in D$ に対し $M \vDash \varphi(b)[e\binom{b}{x}]$.

(5) 充足可能性，恒真

L 上の式 φ が充足可能 (satisfiable) とは，解釈 M と φ を覆う e があって $M \vDash \varphi[e]$ が成り立つことをいう. また φ が恒真 (valid) ($\vDash \varphi$ と書く) とは，任意の解釈 M と φ を覆う任意の e に対して $M \vDash \varphi[e]$ となることをいう. 明らかに次が成り立つ.

$$\varphi(a_1, \ldots, a_n) \text{ が充足可能} \Longleftrightarrow \exists x_1 \cdots \exists x_n \varphi(x_1, \ldots, x_n) \text{ が充足可能}$$

$$\varphi(a_1, \ldots, a_n) \text{ が恒真} \Longleftrightarrow \forall x_1 \cdots \forall x_n \varphi(x_1, \ldots, x_n) \text{ が恒真}$$

$$\varphi \text{ が恒真} \Longleftrightarrow \neg\varphi \text{ が充足可能でない}$$

（6）**モデル**

φ が文（自由変数をもたない論理式）のときは，付値 e は問題にならないから，$M \vDash \varphi[e]$ のことを単に $M \vDash \varphi$ と書く．文 φ に対し，$M \vDash \varphi$ のとき，M を φ のモデルという．

T を L 上の公理系（文の集合とする）のとき，すべての $\varphi \in$ T に対して $M \vDash \varphi$ のとき M は T のモデルであるという．

モデルの理論はこれまで述べてきた証明論の対極に立つ．証明論では項，論理式，あるいは証明といった超数学の対象が記号列または記号列の列に関する構成的帰納的方法によって定義され，それらの性質はその定義にもとづく帰納法（式の構成に関する，あるいは証明の長さや高さに関する）によって証明されるという有限の立場が貫徹された．いわば形式論的構文論的（syntactical）方法であり，「証明」がキーワードであった．それに対し，モデルの理論は形式的な式や文を対象にしながら有限の立場を越えた素朴集合論的解釈論的（semantical）方法であり，「充足」がキーワードとなる．証明論は Frege–Russel–Hilbert–Herbrand–Gentzen–竹内の系譜であり，モデル論は Peirce（パース）–Schröder–Löwenheim–Skolem–Tarski の系譜である．これから両者の関係を真っ向から問題にするので，ここで改まって公理系（理論）T に関する基本的概念たる無矛盾性，完全性等を定義しておこう．

2° 公理系の無矛盾性，完全性

言語 L 上の論理式よりなる公理系（理論）を T としよう．T はしばしば文（自由変数をもたない論理式）よりなるとされる．T が矛盾するとは，ある論理式 φ があって，T$\vdash \varphi$ かつ T$\vdash \neg\varphi$ となることである．T が矛盾すれば，任意の論理式

ψ に対して T$\vdash\psi$ となる．なぜなら T が矛盾すれば，T の有限個の文 $A_1, \ldots, A_n$ があって，$A_1, \ldots, A_n \vdash \varphi$ かつ $A_1, \ldots, A_n \vdash \neg\varphi$ となる．このときは

$$\vdash A_1, \ldots, A_n \longrightarrow \varphi \text{ かつ } \vdash A_1, \ldots, A_n \longrightarrow \neg\varphi \text{ in LK}$$

である．$A_1, \ldots, A_n$ は文であるから，ここでは自由変数は不変であるにきまっている．前者から $\neg$左によって

$$\vdash \neg\varphi, A_1, \ldots, A_n \longrightarrow \text{ in LK}$$

後者と合せカットによって

$$\vdash A_1, \ldots, A_n \longrightarrow \text{ in LK}$$

増右によって

$$\vdash A_1, \ldots, A_n \longrightarrow \psi \text{ in LK}$$

したがって，T$\vdash\psi$ となるからである．

T が矛盾しないとき，T は無矛盾であるという．T が無矛盾であることをいうには，ある論理式 ψ に対して T$\vdash\psi$ でないことをいえば十分である．

T が完全であるとは，L 上の任意の文 φ に対し，T$\vdash\varphi$ か T$\vdash\neg\varphi$ となることである．

3° 述語論理の健全性定理 (Soundness Theorem)

L 上の論理式 φ に対し，$\vdash\varphi$ in H ならば φ は恒真である．(すなわち$\vDash\varphi$ である)．解釈 M と指定 e が与えられ，e が φ を覆うとき，$M\vDash\varphi[e]$ か $M\vDash(\neg\varphi)[e]$ である．($M\vDash(\neg\varphi)[e]$ の定義による)．前者の場合，φ は真，後者の場合 φ は偽であるということにしよう．

$A(X_1, \ldots, X_n)$ は $X_1, \ldots, X_n$ だけを命題変数として含む命題論理式だとする．$X_1, \ldots, X_n$ に L の論理式 $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ を代入したものを $A(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ とする．これは L 上の論理式であって，M と $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ を覆う e が与えられたとき，上に定義した $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ の真偽値に対し，$A(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ の真偽値が自然に定まる．この

とき,

補題　$A(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ が真 $\Longleftrightarrow M \vDash A(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)[e]$.

［証明］ $A(X_1, \ldots, X_n)$ の構成に関する帰納法による.

$A(X_1, \ldots, X_n)$ が X_i のとき, φ_i の真偽の定義によって

$$\varphi_i \text{ が真} \Longleftrightarrow M \vDash \varphi_i[e].$$

A が $\neg B$ のとき, B に対して補題が成り立つとすれば

$$\begin{aligned} A(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \text{ が真} &\Longleftrightarrow B(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \text{ は偽} \\ &\Longleftrightarrow M \vDash B(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)[e] \text{ でない} \\ &\Longleftrightarrow M \vDash \neg B(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)[e] \\ &\Longleftrightarrow M \vDash A(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)[e] \end{aligned}$$

A が $B \wedge C$ で, B, C に対して補題が成り立っているとすれば,

$$\begin{aligned} A(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \text{ が真} &\Longleftrightarrow B(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \text{ が真かつ } C(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \text{ が真} \\ &\Longleftrightarrow M \vDash B(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)[e] \text{ かつ } M \vDash C(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)[e] \\ &\Longleftrightarrow N \vDash (B \wedge C)(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)[e] \end{aligned}$$

［健全性定理の証明］

（1）　H の公理(1)-(8)は恒真である. なぜならこれらの公理は命題論理の恒真式 $A(X_1, \ldots, X_n)$ に対する $A(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ の形をしているから, M とこれを覆う e に関して $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ が真でも偽でも真である. ゆえに上の補題によって $M \vDash A(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)[e]$ である.

（2）　公理(10) $\forall x \varphi(x) \to \varphi(t)$ は任意の M とこれを覆う e に対して真である. $M \vDash \forall x \varphi(x)[e]$ でないならばこのことは正しい. $M \vDash \forall x \varphi(x)[e]$ ならば $\forall x \varphi(x)$ に含まれない自由変数 b に対し, 任意の $x \in D$ に対し $M \vDash \varphi(b)[e\binom{b}{x}]$, とくに $x = t^M[e]$——仮定によって e は t を覆う——に対して $M \vDash \varphi(b)[e\binom{b}{t^M[e]}]$. しかるに

$$M \vDash \varphi(b)[e\binom{b}{t^M[e]}] \Longleftrightarrow M \vDash \varphi(t)[e]$$

だから $M\models(\forall x\varphi(x)\rightarrow\varphi(t))[e]$ が成り立つ.

（3） 公理（9）$\varphi(t)\rightarrow\exists x\varphi(x)$ についても同様である.

（4） $\psi\rightarrow\varphi(a)$ が恒真なら $\psi\rightarrow\forall x\varphi(x)$ も恒真である.（a は ψ にあらわれない）. $\psi\rightarrow\varphi(a)$ が恒真とは，任意の M と ψ, $\varphi(a)$ を覆う e' に対して $M\models\psi[e']$ ならば $M\models\varphi(a)$ $[e']$ ということである．とくに $e'=e\binom{a}{x}$ （ここに e は a 以外の自由変数に対する指定）に対し，$M\models\psi[e\binom{a}{x}]$ ならば $M\models\varphi(a)$ $[e\binom{a}{x}]$ であるが，ψ は a を含まないから $M\models\psi[e\binom{a}{x}]\Longleftrightarrow M\models\psi[e]$. ゆえに $M\models\psi[e]\Longrightarrow M\models\varphi(a)[e\binom{a}{x}]$ が任意の $x\in D$ に対して成り立つ．ゆえに $M\models\psi[e]\Longrightarrow M\models\forall x\varphi(x)[e]$.

（5） $\varphi(a)\rightarrow\psi$ が恒真ならば，$\exists x\varphi(x)\rightarrow\psi$ も恒真である．（4）と同様.

（6） φ, $\varphi\rightarrow\psi$ が恒真ならば，ψ も恒真である．これは $M\models(\varphi\rightarrow\psi)[e]$ の定義より明らか.

完全性定理とは

述語論理の完全性定理は健全性定理の逆，すなわち

$$\models\varphi\Longrightarrow\vdash\varphi \text{ in H}$$

のことである．φ が文のときにいえれば十分である.

$$\begin{aligned}\models\psi(a_1,\ldots,a_n)&\Longrightarrow\models\forall x_1\cdots\forall x_n\psi(x_1,\ldots,x_n)\\&\Longrightarrow\vdash\forall x_1\cdots\forall x_n\psi(x_1,\ldots,x_n)\text{ in H}\\&\Longrightarrow\vdash\psi(a_1,\ldots,a_n)\text{ in H}\end{aligned}$$

だからである．また

$$\models\varphi\Longleftrightarrow\neg\varphi \text{ は充足可能でない}$$

だから対偶をとって，

$$\vdash\varphi\text{ in H でない}\Longrightarrow\neg\varphi\text{ は充足可能}$$

あるいは

$$\vdash\neg\varphi\text{ in H でない}\Longrightarrow\varphi\text{ は充足可能}$$

をいえばよい．しかるに

$$\vdash \neg\varphi \text{ in H でない} \Longleftrightarrow \{\varphi\}\text{は無矛盾}$$

だから，完全性定理は

$$\{\varphi\}\text{は無矛盾} \Longrightarrow \varphi \text{ のモデルが存在する}$$

ということになる．一般化して，任意の公理系 T に対して

$$\text{T が無矛盾} \Longrightarrow \text{T のモデルが存在する}$$

をいえば十分である．これを強完全性定理またはモデルの存在定理という．

本講ではこの形で完全性定理を証明する．健全性定理によりこの逆はつねに成り立つ．すなわち

4°　公理系 T のモデルが存在する $\Longrightarrow$ T は無矛盾である．

［証明］ M が T のモデルだとする．すべての文 $\varphi\in$T に対して $M\vDash\varphi$ である．

1）T$\vdash\psi$ in H ならば，ψ を覆う任意の e に対して $M\vDash\psi[e]$ である．

ψ の自由変数 a に対し，これを $\forall x$ にしたもの（ψ の閉包という）を考え，T$\vdash\psi$ in H なら $M\vDash\psi$ をいえば十分である．T$\vdash\psi$ in H ならば，T の有限個の文 $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ があって

$$\vdash \varphi_1\wedge\varphi_2\wedge\cdots\wedge\varphi_n\rightarrow\psi \text{ in H}$$

となる．健全性定理より，$\varphi_1\wedge\varphi_2\wedge\cdots\wedge\varphi_n\rightarrow\psi$ は恒真すなわち任意の解釈のもとで真である．とくに $M\vDash\varphi_1\wedge\varphi_2\wedge\cdots\wedge\varphi_n$ ならば $M\vDash\psi$ であるが，M は T のモデルだから $M\vDash\varphi_1\wedge\varphi_2\wedge\cdots\wedge\varphi_n$ は成り立つ．ゆえに $M\vDash\psi$.

2）$\vDash\neg\varphi[e]$ の定義により，任意の文 ψ に対し $M\vDash\psi$ かつ $M\vDash\neg\psi$ とはなりえない．

3）T が矛盾すれば，ある文 ψ があって T$\vdash\psi$ かつ T$\vdash\neg\psi$ となる．1）よりそのときは，$M\vDash\psi$ かつ $M\vDash\neg\psi$ となり，2）によってこれはありえない．ゆえに T にモデルがあれば無矛盾である．

5° レーヴェンハイム・スコーレム (Löwenheim-Skolem) の定理

1）L 上の文 φ がある集合 D 上充足可能ならば，高々可算なある $D_0 \subseteq D$ 上充足可能である．

2）T を可算個の文の集合とする．T がある集合 D 上のモデルをもてば高々可算なある集合 $D_0 \subseteq D$ 上のモデルをもつ．

［1）の証明］φ は prenex 型としてよい．また関数記号をもたないとしてよい．関数記号 f_γ の代りに述語記号 $F_\gamma(*_1, *_2)$ を考え，数学の公理として $\forall x \exists ! y F_\gamma(x, y)$ を導入し，$b = f_\gamma(a)$ の代りに $F_\gamma(a, b)$ を考えればよい．多変数の場合も同様である．

他の場合も同様だから

$$\varphi := \forall x_1 \exists y_1 \forall x_2 \forall x_3 \exists y_2 \forall x_4 B(x_1, y_1, x_2, x_3, y_2, x_4) \tag{1}$$

とする．B にあらわれる定数 c_α，述語 p_β を解釈 c_α^M，p_β^M で置き換えたものを B^M で表し，また $\forall x_i$ を $(\forall x)_D$ $(\forall x \in D)$，$\exists y$ を $(\exists y)_D$ $(\exists y \in D)$ で置き換えると，$M \vDash \varphi$ は

$$(\forall x_1)_D (\exists y_1)_D (\forall x_2)_D (\exists y_2)_D (\forall x_4)_D B^M(x_1, y_1, x_2, x_3, y_2, x_4) \tag{2}$$

を意味する．

（2）より，任意の $x_1 \in D$ に対して

$$(\forall x_2)_D (\forall x_3)_D (\exists y_2)_D (\forall x_4)_D B^M(x_1, y_1, x_2, x_3, y_2, x_4)$$

をみたす y_1 が存在するから，その1つを選んで $f(x_1)$ とする．（選択公理が用いられる）．このときは任意の $x_1 \in D$ に対して

$$(\forall x_2)_D (\forall x_3)_D (\exists y_2)_D (\forall x_4)_D B^M(x_1, f(x_1), x_2, x_3, y_2, x_4)$$

が成り立つから，任意の x_1，x_2，$x_3 \in D$ に対し

$$(\forall x_4)_D B^M(x_1, f(x_1), x_2, x_3, y_2, x_4)$$

となる $y_2 \in D$ が存在するからその１つを選んで $g(x_1, x_2, x_3)$ とする．(選択公理)．このとき，任意の x_1，x_2，x_3，$x_4 \in D$ に対して

(３)
$$B^M(x_1, f(x_1), x_2, x_3, g(x_1, x_2, x_3), x_4)$$

が成り立つ．

B に定数記号 c_α があらわれれば，その解釈 c_α^M を集めて C_0 を作る．(C_0 は有限集合)．B に定数記号が１つもあらわれない場合には，ある $a_0 \in D$ をとって $C_0 = \{a_0\}$ とおく．

$$C_{j+1} = C_j \cup \{f(x),\ g(x, y, z) \mid x, y, z \in C_j\}$$

によって $C_1, C_2, \ldots$ を定義する．各 C_j は有限集合で，$D_0 = \bigcup_{j=0}^{\infty} C_j$ とおくと D_0 は高々可算で，f, g に関して閉じている．すなわち $x, y, z \in D_0$ ならば $f(x), g(x, y, z) \in D_0$ である．

$D_0 \subseteq D$ は明らか．任意の $x_1, x_2, x_3, x_4 \in D_0$ に対して(３)が成り立ち，また $f(x_1)$，$g(x_1, x_2, x_3) \in D_0$ だから

(４)
$$(\forall x_1)_{D_0}(\exists y_1)_{D_0}(\forall x_2)_{D_0}(\forall x_3)_{D_0}(\exists y_2)_{D_0}(\forall x_4)_{D_0} B^M(x_1, y_1, x_2, x_3, y_2, x_4)$$

が成り立つ．今 B の中の c_α に対し $c_\alpha^{M_0} = c_\alpha^M$ とおき，$p_\beta^{M_0}$ を p_β^M の D_0 への制限(p_β が n 変数のとき $p_\beta^{M_0} = D_0^n \cap p_\beta^M$) とするとき，(４)が成り立つことは $M_0 = \langle D_0, c_\alpha^{M_0}, p_\beta^{M_0} \rangle$ としたとき $M_0 \vDash \varphi$ であることを意味する．すなわち M_0 は領域 $D_0 \subseteq D$ が高々可算であるような φ のモデルである．

［２）の証明］１）の証明に出てくる $f(x)$ や $g(x, y, z)$ のことを φ のスコーレム関数と呼ぶ．M をモデルとする任意の prenex 型の文には有限個のスコーレム関数がともなうことになる．$\mathrm{T} = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ は可算個の文の集合で各 φ_i は prenex 型とする．各 i に対して $M \vDash \varphi_i$ だから，φ_i の D 上のスコーレム関数が与えられる．これを

$$f_1^i, f_2^i, \ldots, f_{k_i}^i$$

とする．また T にあらわれる定数記号を $c_1, c_2 \ldots$ とする．

2）を証明するためには，D の部分集合で $c_1^M, c_2^M, \ldots$ をすべて含み $f_j^i\,(1 \leq j \leq k_i)$ に関して閉じているような高々可算な集合 D_0 が存在することをいえばよい．

C_0 は D の任意の有限部分集合とし，$C_1, C_2, C_3, \ldots$ を次の式によって定義する．

$$C_{m+1} = C_m \cup \{c_m^M\} \cup \bigcup_{i,\,j} f_j^i(C_m)$$

ここに i,j は $1 \leq i \leq m$，$1 \leq j \leq k_i$ をみたすすべての i,j にわたり，$f_j^i(C_m)$ は C_m の f_j^i による値域である．c_m（m 番目の定数）がないときは$\{c_m^M\}$の部分を除く．

C_m は有限集合だから $D_0 = \bigcup_{m=0}^{\infty} C_m$ は高々可算である．c_m^M は C_{m+1} に入るからすべて D_0 に入る．f_j^i を n 変数とし，$x_1, \ldots, x_n \in D_0$ とする．$C_0 \subseteq C_1 \subseteq C_2 \subseteq \cdots$ だから，ある m があって $x_1, \ldots, x_n \in C_m$．m は任意に大きくとれるから $i \leq m$ としてよい．$f_j^i(C_m) \subseteq C_{m+1}$ だから $f_j^i(x_1, \ldots, x_n) \in C_{m+1}$．ゆえに $f_j^i(x_1, \ldots, x_n) \in D_0$．すなわち D_0 は f_j^i に関して閉じている．

レーヴェンハイム・スコーレムの定理の意義

ZF のモデルを M とすれば可算モデル M_0 があり，そこで N の部分集合の全体 $\mathbf{P}^{M_0}(\boldsymbol{N}^{M_0})$ や実数の全体 $\boldsymbol{R}^{M_0}$ は可算集合となる．$\mathbf{P}(N)$ や $\boldsymbol{R}$ は非可算だったから不合理であるとして，一時スコーレムのパラドクスと呼ばれた．しかし，$\boldsymbol{R}^{M_0}$ や $\mathbf{P}^{M_0}(\boldsymbol{N}^{M_0})$ は M_0 の中では $\boldsymbol{N}^{M_0}$ との間の一対一対応は存在しないという意味で非可算なのである．一方モデルが可算であるというのは理論 T（ここでは ZF）の M での成立を外から見て構成されたものであって何のパラドクスでもない．

しかし，レーヴェンハイム・スコーレムの定理は数学理論の非範疇性（理論 T が対象を一義的に定めないこと——たとえば $\boldsymbol{R}$ はあるモデルでは非可算だが他のモデルでは可算になる——）を強く示唆する．つまりは独立性の予感であって，実際スコーレム自身，1922年の論文で濃度にかかわる問題（たとえば連続体仮説）の ZF からの独立性を示唆している．

集合論の可算モデルは，一般のモデルに比して技術的に極端に扱いやすい．Cohen（コーヘン）による一連の独立性証明のほとんどすべてはZFの可算推移モデルから出発するもので可算性の技術的利点をフルに活用するものである．

選択公理を避けようとするスコーレムの努力のもとで完全性定理とエルブランの定理に直結する一つの補題に到達している．1巻Ⅱ章では，このスコーレムの補題を用いた完全性定理の証明が述べられているがここでは省略する．

6° 完全性定理の証明（ヘンキンの証明）

（1）極大無矛盾拡大　$\langle L, T\rangle$ が与えられ，T は L 上の文の集合とする．T が無矛盾なら極大無矛盾拡大（maximal consistent extension）T′ が存在する．すなわち $T\subseteq T'$，T′ は無矛盾，かつ文 φ が $\varphi\notin T'$ ならば $\{T', \varphi\}$ は矛盾する．

L が高々可算の場合で証明しよう（一般の場合はツォルンの補題による）．このときは，L 上の文の全体は高々可算だからこれを $\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots\}$ とする．任意の n に対して文 χ_n を決めていく（$n=0, 1, 2, \ldots$）．$T_0=T$ とおく．$T_0\cup\{\varphi_0\}$ が無矛盾なら $\chi_0=\varphi_0$ とおき，そうでないときは $\chi_0=\neg\varphi_0$ とおく．

$$T_1=T_0\cup\{\chi_0\}$$

とおく．$\chi_0, \ldots, \chi_{n-1}$ まで定まったとし，$T_n=T_0\cup\{\chi_0, \ldots, \chi_{n-1}\}$ とする．$T_n\cup\{\varphi_n\}$ が無矛盾ならば $\chi_n=\varphi_n$，そうでないときは $\chi_n=\neg\varphi_n$ とおく．

$$T_{n+1}=T_n\cup\{\chi_n\}, \qquad T'=\bigcup_n T_n$$

とおく．

（i）T_n は無矛盾である．n に関する帰納法による．T_0 は仮定によって無矛盾である．T_n が無矛盾ならば，$T_n\cup\{\varphi_n\}, T_n\cup\{\neg\varphi_n\}$ が同時に矛盾することはない（さもなくば T_n が矛盾することになる）．したがって $T_n\cup\{\chi_n\}$ は無矛盾である．

（ii）$T'=\bigcup_n T_n$ は無矛盾である．T′ が矛盾するなら T′ の有限個の文から矛

盾が出るが，そのときは十分大きな n に対して T_n が矛盾することになり（i）に反する．

（iii） 任意の文 φ_n に対して $\varphi_n \in T'$ か $\neg\varphi_n \in T'$ である．$\chi_n = \varphi_n \in T_{n+1}$ のときは $\varphi_n \in T'$，$\chi_n = \neg\varphi_n$ のときは $\neg\varphi_n \in T'$．

（iv） T' は極大無矛盾である．$\varphi_n \notin T'$ なら $\chi_n = \neg\varphi_n$ の場合だから $T_{n+1} \cup \{\varphi_n\}$ は矛盾．このときは $T' \cup \{\varphi_n\}$ は矛盾する．

（v） $T' \vdash \varphi \Longleftrightarrow \varphi \in T'$．$\Leftarrow$ は自明．$\varphi \notin T'$ なら $T' \cup \{\varphi\}$ は矛盾するから $T' \vdash \varphi$ ではない．(T' は無矛盾だから $T' \vdash \varphi$ なら $T' \cup \{\varphi\}$ も無矛盾となる)．

（2）$\langle L, T\rangle$ の拡大 $\langle \tilde{L}, \tilde{T}\rangle$（定数記号の付加）

$\langle L, T\rangle$ を無矛盾とし L 上の文で $\exists x\varphi(x)$ の形のものに新しい定数記号 c_φ を対応させ（φ と φ' が異なれば c_φ と $c_{\varphi'}$ も異なるとする）．c_φ を L に加えた言語を $\tilde{L}$ とし

公理（＊）

$$\exists x\varphi(x) \to \varphi(c_\varphi)$$

を T に付加したものを $\tilde{T}$ とする．このとき $\tilde{T}$ は無矛盾である．

［証明］$\tilde{T}$ が矛盾すれば，ある Γ に対し

$$\Gamma, \exists x\varphi(x) \to \varphi(c_\varphi) \longrightarrow$$

が LK で証明可能である．ここで Γ は $\tilde{T}$ は文の有限列である．このとき，$\Gamma \rightarrow \exists x\varphi(x)$，$\Gamma, \varphi(c_\varphi) \rightarrow$ はともに LK で証明可能である．

一般に $\Gamma, A \to B \rightarrow$ が証明可能なら Γ，$B \rightarrow$，$\Gamma \rightarrow A$ は証明可能である．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{B \longrightarrow B}{\Gamma, A, B \longrightarrow B}\ (\text{増})}{\Gamma, B \longrightarrow A \to B}\ (\text{換，}\to\text{右}) \qquad \Gamma, A \to B \longrightarrow}{\Gamma, B \longrightarrow}\ (\text{換，カット，減})$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \longrightarrow A}{A \longrightarrow A, B}}{\longrightarrow A, A \to B} \qquad \Gamma, A \to B \longrightarrow}{\Gamma \longrightarrow A}\ (\text{カット})$$

$\Gamma, \varphi(c_\varphi) \to$ が証明可能なら，これに至る証明図にあらわれない自由変数 a によって c_φ を置き換えてもやはり証明図であり，$\Gamma, \varphi(a) \to$ が証明可能になるから，$\Gamma, \exists x\varphi(x) \to$ が証明可能になる．$\Gamma \to \exists x\varphi(x)$ が証明可能だから $\Gamma \to$ が証明可能になる．Γ の中に(＊)の形の文があるかぎりこれを除いたものも矛盾する．すなわち T の有限個の文で矛盾が出る．したがって T が矛盾することになる．

（3）$\tilde{\mathrm{T}}$ の極大無矛盾拡大 T*

与えられた $\langle \mathrm{L}, \mathrm{T} \rangle$（無矛盾）の拡大 $\langle \tilde{\mathrm{L}}, \tilde{\mathrm{T}} \rangle$ をつくり，$\tilde{\mathrm{T}}$ の極大無矛盾拡大を T* とする．そのとき

（i）　$\varphi \in \mathrm{T}^* \Longleftrightarrow \mathrm{T}^* \vdash \varphi$.

（ii）　$\tilde{\mathrm{L}}$ 上の任意の文 φ に対して $\varphi \in \mathrm{T}^*$ または $\neg\varphi \in \mathrm{T}^*$.

（iii）　$\varphi \wedge \psi \in \mathrm{T}^* \Longleftrightarrow \varphi \in \mathrm{T}^*$ かつ $\psi \in \mathrm{T}^*$.

$\mathrm{T}^* \vdash \varphi \wedge \psi \Longleftrightarrow \mathrm{T}^* \vdash \varphi$ かつ $\mathrm{T}^* \vdash \psi$ だから

（iv）　$\varphi \vee \psi \in \mathrm{T}^* \Longleftrightarrow \varphi \in \mathrm{T}^*$ または $\psi \in \mathrm{T}^*$.

$\Leftarrow$ は自明．$\Rightarrow$ の方．

$$\varphi \notin \mathrm{T}^* \text{ かつ } \psi \notin \mathrm{T}^* \Longrightarrow \neg\varphi \in \mathrm{T}^* \text{ かつ } \neg\psi \in \mathrm{T}^*$$
$$\Longrightarrow \neg\varphi \wedge \neg\psi \in \mathrm{T}^*$$

すなわち $\neg(\varphi \vee \psi) \in \mathrm{T}^*$，ゆえに $\varphi \vee \psi \notin \mathrm{T}^*$.

（v）　$\exists x\varphi(x) \in \mathrm{T}^* \Longleftrightarrow$ ある閉項(自由変数を含まない項) t があって $\varphi(t) \in \mathrm{T}^*$.

$\Leftarrow$ は自明．$\Rightarrow$ は公理(＊)による（c_φ は閉項である）．

（vi）　$\forall x\varphi(x) \in \mathrm{T}^* \Longleftrightarrow$ すべての閉項 t に対して $\varphi(t) \in \mathrm{T}^*$.

$\Rightarrow$ は自明．$\Leftarrow$ の方．もし $\forall x\varphi(x) \notin \mathrm{T}^*$ なら $\neg\forall x\varphi(x) \in \mathrm{T}^*$，すなわち $\exists x\neg\varphi(x) \in \mathrm{T}^*$．（v）によって，ある閉項 t があって $\neg\varphi(t) \in \mathrm{T}^*$，$\varphi(t) \notin \mathrm{T}^*$.

（4）T* のモデルの存在

a）$M = \langle D, c_\alpha^M, p_\beta^M, f_\gamma^M \rangle$ の定義

（i） D は $\tilde{\mathrm{L}}$ 上のすべての閉項の集合

（ii） 定数 c （L の c_α と付加した c_φ） に対して $c^M=c$

（iii） n 変数述語 p_β に対し，

$$\langle t_1, \ldots, t_n\rangle \in D^n \text{ に対し } \langle t_1, \ldots, t_n\rangle \in p_\beta^M \Longleftrightarrow p_\beta(t_1, \ldots, t_n) \in \mathrm{T}^*.$$

（iv） n 変数関数 f_γ に対し

$$\langle t_1, \ldots, t_n\rangle \in D^n \text{ に対し } f_\gamma^M(t_1, \cdots, t_n) = f_\gamma(t_1, \cdots, t_n).$$

これは $f_\gamma^M: D^n \to D$ を定める.

b） $M \vDash \varphi[e] \Longleftrightarrow \varphi[e] \in \mathrm{T}^*$ の証明 （e が φ を覆うとして）.

（i） φ が原子論理式 $p_\beta(t_1, \ldots, t_n)$ のとき. e がこれを覆うとして

$$M \vDash \varphi[e] \Longleftrightarrow \langle t_1^M[e], \ldots, t_n^M[e]\rangle \in p_\beta^M \ (M \vDash \varphi[e] \text{の定義})$$

$$\Longleftrightarrow \langle t_1[e], \ldots, t_n[e]\rangle \in p_\beta^M \ (t^M[e] = t[e] \text{だから})$$

$$\Longleftrightarrow p_\beta\langle t_1[e], \ldots, t_n[e]\rangle \in \mathrm{T}^* \ (p_\beta^M \text{ の定義})$$

t が $t(a_1, \ldots, a_n)$， $e=\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \\ x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$， $x_1, \ldots, x_n$ は $\tilde{\mathrm{L}}$ の閉項 $\in D$ のとき，

$t[e]$ は $t(x_1, \ldots, x_n)$ を表している.

（ii） φ が $\neg\psi$ のとき

$$M \vDash \neg\psi[e] \Longleftrightarrow M \vDash \psi[e] \text{ でない } (M \vDash \neg\psi[e] \text{ の定義})$$

$$\Longleftrightarrow \psi[e] \notin \mathrm{T}^* \ (\psi \text{ に関する仮定})$$

$$\Longleftrightarrow \neg\psi[e] \in \mathrm{T}^* \ (\mathrm{T}^* \text{の性質(ii)})$$

（iii） $\varphi \wedge \psi$ のとき

$$M \vDash (\varphi\wedge\psi)[e] \Longleftrightarrow M \vDash \varphi[e] \text{ かつ } M \vDash \psi[e] \ (M \vDash (\varphi\wedge\psi)[e] \text{ の定義})$$

$$\Longleftrightarrow \varphi[e] \in \mathrm{T}^* \text{かつ} \psi[e] \in \mathrm{T}^* \ (\varphi,\ \psi \text{ に関する仮定})$$

$$\Longleftrightarrow \varphi[e] \wedge \psi[e] \in \mathrm{T}^* \ (\mathrm{T}^* \text{の性質(iii)})$$

$$\Longleftrightarrow (\varphi\wedge\psi)[e] \in \mathrm{T}^*$$

(iv)(v)　$\varphi\vee\psi$, $\varphi\to\psi$ のときも同様

(vi)　$\exists x\varphi(x)$ のとき

$$M\vDash\exists x\varphi(x)\Longleftrightarrow t\in D \text{ があって } M\vDash\varphi(b)\left[e\binom{b}{t}\right] \ (M\vDash\exists x\varphi(x)\text{の定義})$$

$$\Longleftrightarrow t\in D \text{ があって } \varphi(t)[e]\in \mathrm{T}^* \ (\varphi(t)\text{ に関する仮定})$$

$$\Longleftrightarrow \exists x\varphi(x)[e]\in \mathrm{T}^* \ (\mathrm{T}^*\text{に関する性質(v)})$$

以上によって $\varphi\in \mathrm{T}^*$ に対して $M\vDash\varphi\Longleftrightarrow\varphi\in \mathrm{T}^*$ だから，M が T^* のモデルであることがわかった．$\mathrm{T}\subseteq\tilde{\mathrm{T}}\subseteq\mathrm{T}^*$ だから M は T のモデルである．

強完全性定理（モデルの存在定理）：T が無矛盾ならモデル M がある．

が証明された．L が高々可算なら D は可算だから M は可算モデルである．

7　その他のこと

(1) $\langle \mathrm{L},\mathrm{T}\rangle$ が等号公理をもつ無矛盾な系とするとき，＝を D 上の＝によって解釈されるモデルが存在する．等号公理とは次の公理である．

(i)　$a=a$

(ii)　$a_1=b_1\wedge a_2=b_2\wedge\cdots\wedge a_n=b_n\longrightarrow(p_\beta(a_1,a_2,\ldots,a_n)\to p_\beta(b_1,b_2,\ldots,b_n))$

(iii)　$a_1=b_1\wedge a_2=b_2\wedge\cdots\wedge a_n=b_n\longrightarrow(f_\gamma(a_1,a_2,\ldots,a_n)=f_\gamma(b_1,b_2,\ldots,b_n))$

(2) コンパクト性定理

T は L 上の公理系とする．T の任意の有限個の文がモデルをもてば T はモデルをもつ．

(3) 任意の無限濃度モデル

T は等号公理をもち，任意の自然数 n に対して n より大きい個数の領域上のモデルをもつとする．（とくに T が可算モデルをもつ場合）T は任意の無限濃度より小さくない領域上のモデルをもつ．

(4) 自然数論 N のノンスタンダードモデルが存在する．

証明は省略する．入門1巻II章をみられたい．

文　献

Löwenheim (1915), Skolem (1920) については，英訳が

- "From Frege to Gödel" (Heijenoort 編) にある．

完全性定理の最初の証明は

- K. Gödel, *Die vollständigkeit der Axioms deslogischen Funktionen Kalküls,* Monatshefte für Mathematik und Physik, vol. 37 (1930), pp. 349-360

英訳が上記 "From Frege to Gödel" に，邦訳が

- 広瀬，横田「ゲーデルの世界」(海鳴社)

の中にある．

本講にあるヘンキンの証明は

- L. Henkin, *The completeness of the first order functional calculus,* The Journal of Symbolic Logic, vol. 14 (1949), pp. 159-166

の Hassenjaeger による改良によるものである．

完全性定理については前掲の前原，大芝の著書にもある．

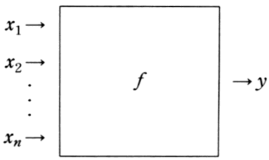
Ⅶ　原始帰納的関数

1°　計算とは

以下では原始帰納(的)関数と呼ばれるもっとも基本的な計算可能関数の族を研究する．数学基礎論は「証明」を対象にすると同時に「計算」をも対象にする．いうなれば数学基礎論の対象は「集合」と「証明」と「計算」なのである．Ⅰ，Ⅱで集合をⅢ-Ⅴで証明をⅥで証明と集合を扱って来たわけである．だが計算可能関数とは何か．

計算とは，計算手順，入力，計算過程，出力を構成部分としてもち，有限的性格がこれを貫徹する．

自然数 $x_1, \ldots, x_n$ に対し，$y=f(x_1, \ldots, x_n)$ が計算される場合を考える．入力 $x_1, \ldots, x_n$ が与えられたとき，計算手順 f にしたがって有限回のステップで出力 y を出す．入力から出力にいたる計算過程は入力 $x_1, \ldots, x_n$ に依存するが，かならず有限回のステップで終わらなければならない．



ここに f と書かれた計算手順は個々の入力 → 計算過程 → 出力とは独立に，かつこの上にあって計算を制御する有限個の指針，仕様であり，これをアルゴリズムというのである．

コンピュータでは，アルゴリズムはプログラムによって与えられ，プログラム自体が入力として投入される．

計算可能関数，決定可能述語とは任意の $x_1, \ldots, x_n \in \boldsymbol{N}$（自然数全体）に対して

値が計算されるアルゴリズム，および任意の $x_1, ..., x_n \in N$ に対して真偽が決定されるアルゴリズムをもつような関数と述語のことである．

2° 直観的内容的自然数

ここで問題になる自然数は直観的内容的なものであって形式的自然数論の対象になるものではない．直観的内容的な数の概念は数学の形式化にともなって消滅するものではなく，超数学の前提になるものとして残るのである．たとえば n 個の自由変数 $\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, ..., \mathrm{a}_n$ という場合の n，長さ l の証明図という場合の l がそれである．この章とⅧ，Ⅸ章では直観的内容的な対象（数，関数，述語など）と形式的対象（変数，項，論理式など）を厳密に区別する必要があるので，前者をイタリック体の文字を使い，$a, b, c, x, y, z, ...$；$f, g, h ...$；$P, Q, R, ...$ などで表し，後者をローマン体の文字を使い，a, b, c, x, y, z, ...；t, s, ...；A, B, C, ... などで表わすことにする．論理記号も純記号としてでなくその内容に則して考察されるので別の記号を用いよう．

形式としての $\neg$，　$\wedge$，　$\vee$，　$\rightarrow$，　$\forall\mathrm{x}$，　$\exists\mathrm{x}$，　$\leftrightarrow$　の代わりに

$-$，　&，　$\vee$，　$\rightarrow$，　(x)，　(Ex)，　$\equiv$

を用いよう．命題 A の否定は $\bar{A}$ であらわす．$\vee$，$\rightarrow$ は形式的記号と同じだが前後関係から混同することはあるまいと思われる．

3° 原始帰納関数（Primitive Recursive function）の定義

原始帰納的関数は，始関数から出発し，合成と帰納的定義を有限回くりかえして得られる関数であると定義される．

（1）**始関数**は次の3つである．

（Ⅰ）　$\varphi(x) = x'\ (= x+1)$

（Ⅱ）　$\varphi(x_1, ..., x_n) = q$　　（定数（自然数））

（Ⅲ）　$\varphi_i(x_1, ..., x_n) = x_i$　$(1 \leq i \leq n)$

（2）**合成**

m 個の n 変数関数 $\chi_1(x_1,\ldots,x_n),\chi_2(x_1,\ldots,x_n),\ldots,\chi_m(x_1,\ldots,x_n)$ および一つの m 変数関数 $\psi(x_1,\ldots,x_m)$ が与えられたとき

（Ⅳ）　$\varphi(x_1,\ldots,x_n)=\psi(\chi_1(x_1,\ldots,x_n),\chi_2(x_1,\ldots,x_n),\ldots,\chi_m(x_1,\ldots,x_n))$

によって φ を作ること．

$\chi_1,\ldots,\chi_m,\psi$ が計算可能なら（Ⅳ）によって得られる φ も計算可能であることはあきらかである．

$\chi_1,\ldots,\chi_m$ がすべて n 変数とされているのは何らの制限ではない．なぜなら（Ⅲ）を用いて，任意の関数はその変数の個数以上の変数をもつ関数とみなされるからである．たとえば2変数関数 $\chi(x_1,x_2)$ は

（Ⅲ）の $\varphi_1(x_1,x_2,x_3)=x_1$，$\varphi_2(x_1,x_2,x_3)=x_2$ を用いて，

$$\chi(\varphi_1(x_1,x_2,x_3),\ \varphi_2(x_1,x_2,x_3))$$

のように3変数関数の形にあらわされる．

（3）**帰納的定義**

関数 $\chi(x,y)$ と定数 q が与えられたとき

$$\text{(Va)}\quad \begin{cases}\varphi(0)=q\\ \varphi(y')=\chi(y,\varphi(y))\end{cases}$$

によって φ を定義すること．

χ が計算可能なら $\varphi(x)$ も計算可能である．なぜなら $\varphi(0)=q$ が定まり，$\varphi(y)=z$ の値が求まったときは $\varphi(y')=\chi(y,\varphi(y))=\chi(y,z)$ によって $\varphi(y')$ は計算可能であるからである．y が大きくなるに従って，$\varphi(y)$ を求める計算過程は一般には長くなるが一様な仕方で計算できる．

$n>1$ のとき $\psi(x_1,\ldots,x_{n-1})$，$\chi(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1})$ が与えられたとき

$$\text{(Vb)}\quad \begin{cases}\varphi(0,x_2,\ldots,x_n)=\psi(x_2,\ldots,x_n)\\ \varphi(y',x_2,\ldots,x_n)=\chi(y,\varphi(y,x_2,\ldots,x_n),x_2,\ldots,x_n)\end{cases}$$

によって φ を定義すること．この場合も ψ と χ が計算可能なら φ も計算可能となる．

4° 原始帰納関数の例

（1） $a+b$ （2） $a\cdot b$ （3） a^b （4） $a!$

（5） $\mathrm{Pd}(a)$ ($a>0$ なら $a-1$, $a=0$ なら 0)

（6） $a\dot{-}b$ ($a\geq b$ なら $a-b, a<b$ なら 0)

（7） $\min(a, b)$ (7′) $\min(a_1, \ldots, a_n)$

（8） $\max(a, b)$ (8′) $\max(a_1, \ldots, a_n)$

（9） $\overline{\mathrm{sg}}(a)$ ($a=0$ のとき 1, $a>0$ のとき 0)

(10) $\mathrm{sg}(a)$ ($a>0$ のとき 1, $a=0$ のとき 0)

(11) $|a-b|$ (12) $\mathrm{rm}(a, b)$ (a を b で割った余り)

(13) $[a/b]$ (a を b で割った商)

以上の（1）-(13)は原始帰納関数である．（1）-（4）を定める帰納的定義は周知のことだろう．

（5）は ($\mathrm{Pd}(0)=0$, $\mathrm{Pd}(a')=a$)．

（6）は $a\dot{-}0=a$, $a\dot{-}b'=\mathrm{Pd}(a\dot{-}b)$．

（7）$\min(a, b)=b\dot{-}(b\dot{-}a)$．

(7′)（(7)のくりかえし)．

（8）$\max(a, b)=(a+b)\dot{-}\min(a, b)$．

(8′)（(8)のくりかえし)．

（9）$\overline{\mathrm{sg}}(a)=1\dot{-}a$．

(10) $\mathrm{sg}(a)=\min(a, 1)$．

(11) $|a-b|=(a\dot{-}b)+(b\dot{-}a)$．

(12)，(13)だけ説明しよう．

（i）　$\mathrm{rm}(a,b)$（a を b で割った余り）

$$\begin{cases}\mathrm{rm}(0,b)=0\\ \mathrm{rm}(a',b)=(\mathrm{rm}(a,b))'\cdot \mathrm{sg}|b-((\mathrm{rm}(a,b))'|\end{cases}$$

（ii）　$[a/b]$（a を b で割った商）

$$\begin{cases}[0/b]=0\\ [a'/b]=[a/b]+\overline{\mathrm{sg}}|b-(\mathrm{rm}(a,b))'|\end{cases}$$

（iii）　$b=0$ のとき $\mathrm{rm}(a,0)=a$，$[a/0]=0$．（(i)，(ii)はこれを示している）．

（iv）　$b>0$ のとき $a=b\cdot q+r$，$r<b$ とする．$\mathrm{rm}(a,b)=r$，$[a/b]=q$ である．

（v）　$r'<b$ のとき，$\mathrm{sg}|b-(\mathrm{rm}(a,b))'|=1$，$\overline{\mathrm{sg}}|b-(\mathrm{rm}(a,b))'|=0$．このときは，$a'=b\cdot q+r'$，$r'<b$ だから，$\mathrm{rm}(a',b)=r'=(\mathrm{rm}(a,b))'$，$[a'/b]=q=[a/b]$．

（vi）　$r'=b$のとき，$\mathrm{sg}|b-(\mathrm{rm}(a,b))'|=0$，$\overline{\mathrm{sg}}|b-(\mathrm{rm}(a,b))'|=1$．このときは $a'=b\cdot q+r'=b\cdot q+b=b\cdot q'$だから，$\mathrm{rm}(a',b)=0$，$[a'/b]=q'=[a/b]+1$．

5° 有限和，有限積

$$\sum_{y<z}\psi(x_1,\ldots,x_n,y)\qquad (z=0 \text{ のとき } 0 \text{ と規約})$$

$$\prod_{y<z}\psi(x_1,\ldots,x_n,y)\qquad (z=0 \text{ のとき } 1 \text{ と規約})$$

定理1　ψ が $n+1$ 変数の原始帰納的関数ならば，これらは $z,x_1,\ldots,x_n$ を変数とする原始帰納的関数である．

6° 原始帰納的述語 (Primitive Recursive Predicate)

$R(x_1,\ldots,x_n)$ を n 変数の述語（任意の $x_1,\ldots,x_n$ に対してその真偽が定まっている）とする．

$$R(x_1,\ldots,x_n)\Longleftrightarrow f(x_1,\ldots,x_n)=0$$

$$\bar{R}(x_1,\ldots,x_n)\Longleftrightarrow f(x_1,\ldots,x_n)=1$$

をみたす関数 f のことを R の表現関数 (representing function) という.

表現関数が原始帰納関数であるような述語を原始帰納的述語という.

例. $a=b$ の表現関数は $\mathrm{sg}|a-b|$, $a\leq b$ の表現関数は $\mathrm{sg}|a\dot{-}b|$, $a<b$ の表現関数は $\mathrm{sg}|a'-b|$.

7° 有界量記号つき述語等

$R(y)$ を述語とするとき

$(y)_{y<z}R(y)$ は $(y)(y<z\to R(y))$ を

$(Ey)_{y<z}R(y)$ は $(Ey)(y<z\ \&\ R(y))$

を意味するものとする.

$$(\mu y)_{y<z}R(y)=\begin{cases}(Ey)_{y<z}R(y)\ \text{のときそのような}\ y\ \text{の最小値}\\ z \qquad (Ey)_{y<z}R(y)\ \text{でないとき}\end{cases}$$

定理 2 $Q(x_1,\ldots,x_n)$, $R(x_1,\ldots,x_n)$ が原始帰納的な述語ならば,

$$\bar{Q},\ Q\ \&\ R,\ Q\vee R,\ Q\to R,\ Q\equiv R$$

は原始帰納的述語である.

定理 3 $P(x_1,\ldots,x_m)$ が m 変数原始帰納的述語で $\chi_1,\ldots,\chi_m$ が原始帰納関数ならば $P(\chi_1,\ldots,\chi_m)$ も原始帰納的述語である.

定理 4 $n+1$ 変数原始帰納的述語 $R(x_1,\ldots,x_n,y)$ に対し

(i) $(Ey)_{y<z}R(x_1,\ldots,x_n,y)$, $(y)_{y<z}R(x_1,\ldots,x_n,y)$ は原始帰納的述語であり,

(ii) $(\mu y)_{y<z}R(x_1,\ldots,x_n,y)$ は原始帰納的関数である.

[定理 2 の証明] Q, R の表現関数をそれぞれ ψ, χ とするとき, $\bar{Q}(x_1,\ldots,x_n)$ の表現関数は, $\overline{\mathrm{sg}}(\psi(x_1,\ldots,x_n))$.

$Q(x_1,\ldots,x_n)\vee R(x_1,\ldots,x_n)$ の表現関数は $\psi(x_1,\ldots,x_n)\cdot\chi(x_1,\ldots,x_n)$ で原始帰納的である. 他の場合はこれから導かれる.

[定理 3 の証明] P の表現関数を φ とするとき, $P(\chi_1,\ldots,\chi_m)$ の表現関数は

$\varphi(\chi_1, \ldots, \chi_m)$ である.

［定理 4 の証明］

（ i ）　R の表現関数を χ とするとき，$(Ey)_{y<z}R(x_1, \ldots, x_n, y)$ の表現関数は

$$\prod_{y<z}\chi(x_1, \ldots, x_n, y)$$

であり，$(y)_{y<z}R(x_1, \ldots, x_n, y)$ の表現関数は

$$\mathrm{sg}\Bigl(\sum_{y<z}\chi(x_1, \ldots, x_n, y)\Bigr)$$

であることからわかる.

（ ii ）　R の表現関数を χ とする.

$$\pi(y) = \prod_{s\leq y}\chi(x_1, \ldots, x_n, s)$$

$$\sigma(y) = \sum_{t<y}\pi(t)$$

とおけば $\pi(y)$ も $\sigma(y)$ も原始帰納関数である.（$x_1, \ldots, x_n$ を略してある）.

$(Ey)_{y<z}R(y)$ の場合，$y_0 = (\mu y)_{y<z}R(y)$ とおけば，$\pi(y)$ は $y<y_0$ に対しては 1，$y\geq y_0$ に対しては 0. $\sigma(z) = \sum_{t<z}\pi(t)$ において，$\pi(0)$ から $\pi(y_0 \dot{-} 1)$ までは 1. その他の t に対しては $\pi(t) = 0$ だから $\sigma(z) = y_0$ となる. $(\overline{Ey})_{y<z}R(y)$ の場合，$y<z$ に対して $\pi(y) = \prod_{s\leq y}\chi(s)$ はみな 1 だから，$\sigma(z) = \sum_{t<z}\pi(t) = z$ となる. すなわち $\sigma(z) = (\mu y)_{y<z}R(y)$.

8° 場合分けによる定義

m 個の述語 $Q_1(x_1, \ldots, x_n)$，$Q_2(x_1, \ldots, x_n)$，$\ldots$，$Q_m(x_1, \ldots, x_n)$ が互いに非両立であるとは任意の $x_1, \ldots, x_n$ に対し，その中のたかだか一つだけが真になる（一つが真ならあとはみな偽）ことを意味する.

定理 5　$Q_1, \ldots, Q_m$ は互いに非両立な n 変数原始帰納的述語，$\varphi_1, \ldots, \varphi_{m+1}$ は n 変数原始帰納的関数とする. そのとき

$$\varphi(x_1,\ldots,x_n)=\begin{cases}\varphi_1(x_1,\ldots,x_n) & \text{if } Q_1(x_1,\ldots,x_n)\\ \varphi_2(x_1,\ldots,x_n) & \text{if } Q_2(x_1,\ldots,x_n)\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ \varphi_m(x_1,\ldots,x_n) & \text{if } Q_m(x_1,\ldots,x_n)\\ \varphi_{m+1}(x_1,\ldots,x_n) & \text{その他のとき}\end{cases}$$

によって定義される $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ は原始帰納的関数である.

［証明］ $\psi_1,\ldots,\psi_m$ を $Q_1,\ldots,Q_m$ の表現関数とするとき

$$\varphi=\overline{\mathrm{sg}}(\psi_1)\cdot\varphi_1+\overline{\mathrm{sg}}(\psi_2)\cdot\varphi_2+\cdots+\overline{\mathrm{sg}}(\psi_m)\cdot\varphi_m+\psi_1\cdot\cdots\cdot\psi_m\cdot\varphi_{m+1}$$

これは原始帰納的関数である.

$Q_j(x_1,\ldots,x_n)$が成り立つとき, $\psi_j=0$ だから項 $\overline{\mathrm{sg}}(\psi_j)=1$, ゆえに $\overline{\mathrm{sg}}(\psi_j)\cdot\varphi_j=\varphi_j$. $j'\neq j$ に対しては, 非両立の仮定から $\psi_{j'}=1$ だから $\overline{\mathrm{sg}}(\psi_{j'})\cdot\varphi_{j'}=0$. 最後の項は $\psi_j=0$ だから 0 となり, $\varphi=\varphi_j$ となる.

その他の場合(すべての $Q_1,\ldots,Q_m$ が偽のとき), すべての $\psi_j=1$ だから $\overline{\mathrm{sg}}(\psi_i)\cdot\varphi_j=0$. 最後の項 $\psi_1\cdot\cdots\cdot\psi_m\cdot\varphi_{m+1}$ において, $\psi_1,\cdots,\psi_m$ はすべて 1 だから φ_{m+1} となる. ゆえに $\varphi=\varphi_{m+1}$.

9° 素因数分解に関する関数と述語

素数 2, 3, 5, 7, 11, 13, ... を大きさの順に並べて

$$p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$$

とする. (p_i は $i+1$ 番目の素数)

素数は無限にある.

［証明］ (ユークリッド)

仮に素数が有限個 $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n$ しかないとする. $m=p_n!+1$ を考える. m が素数だとするとそれは $p_0, p_1, \ldots, p_n$ のどれよりも大きい素数だから仮定に反する.

だから m は合成数である．その素因数の一つを q とする．q は $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n$ のどれとも異なる．なぜなら m は $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n$ のどれで割っても 1 余って割り切れないから m の素因数ではありえない．q は $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n$ のどれとも異なる素数であるからこれより大きくなければならない．すなわち $p_i < q \leq p_i! + 1$ を満足する素数が存在することになる．

素因数分解の一意性

任意の自然数 $a \neq 0$ はただ一通りの方法で

$$a = p_0^{a_0} p_1^{a_1} \cdots p_t^{a_t}$$

の形に書ける．ここに p_i が a の素因数としてあらわれない場合は $a_i = 0$ である．もちろんあるところより先の i についてはすべて $a_i = 0$ となる．

次の関数および述語はすべて原始帰納的である．

(14)　$a|b$　(a は b を割る)

$$(Ec)_{c \leq b}(ac = b).$$

(15)　$\mathrm{Prim}(a)$　(a は素数である)

$$\mathrm{Prim}(a) \leftrightarrow a > 1 \ \& \ (\overline{\mathrm{Ec}})_{1 < c < a}(c|a).$$

(16)　p_i　($i+1$ 番目の素数)

$$\begin{cases} p_0 = 2 \\ p_{i'} = (\mu y)_{p_i < y \leq p_i! + 1} \mathrm{Prim}(y). \end{cases}$$

(17)　$(a)_i$　($a = 0$ なら 0，$a \neq 0$ なら素因数分解における p_i のベキ指数 a_i)

$$(a)_i = (\mu x)_{x < a}[p_i^x | a \ \& \ \overline{(p_i^{x'} | a)}].$$

(18)　$\mathrm{lh}(a)$　($a = 0$ なら 0，$a \neq 0$ なら a の素因数の個数)

$\mathrm{lh}(i, a)$ (a の素因数のうち p_i より小さいものの個数)

$\mathrm{lh}(0, a) = 0$

$$\mathrm{lh}(i',a)=\begin{cases}\mathrm{lh}(i,a)+1 & p_i|a \text{ の場合}\\ \mathrm{lh}(i,a) & \text{その他の場合}\end{cases}$$

$\mathrm{lh}(a)=\mathrm{lh}(a,a)$.

(19) $a*b=a\cdot\prod_{i<\mathrm{lh}(b)} p_{\mathrm{lh}(a)+i}^{(b)_i}$

$a=p_0^{a_0}\cdots p_s^{a_s}$, $(a_0,\ldots,a_s>0)$, $b=p_0^{b_0}\cdots p_t^{b_t}(b_0,\ldots,b_t>0)$ のとき，$\mathrm{lh}(a)=s+1$, $\mathrm{lh}(b)=t+1$ だから

$$a*b=p_0^{a_0}\cdots p_s^{a_s}p_{s+1}^{b_0}\cdots p_{s+t+1}^{b_t}$$

10° 累積帰納法

関数 $\varphi(y,x_2,\ldots,x_n)$ に対し

$$\tilde{\varphi}(y,x_2,\ldots,x_n)=\prod_{i<y}p_i^{\varphi(i,x_2,\ldots,x_n)}.$$

とおく．$s<y$ に対し

$$\varphi(s,x_2,\cdots,x_n)=(\tilde{\varphi}(y,x_2,\cdots,x_n))_s.$$

である．

φ と $\tilde{\varphi}$ は一方が原始帰納的なら他方も原始帰納的である．

定理 7 χ が原始帰納関数ならば

$$\varphi(y,x_2,\ldots,x_n)=\chi(y,\tilde{\varphi}(y,x_2,\ldots,x_n),x_2,\ldots,x_n)$$

をみたす φ も原始帰納的関数である．

［証明］

$$\begin{cases}\tilde{\varphi}(0,x_2,\ldots,x_n)=1\\ \tilde{\varphi}(y',x_2,\ldots,x_n)=\tilde{\varphi}(y,x_2,\ldots,x_n)p_y^{\chi(y,\tilde{\varphi}(y,x_2,\ldots,x_n),x_2\ldots,x_n)}\end{cases}$$

だから $\tilde{\varphi}$ は原始帰納的関数である．したがって

$$\varphi(y,x_2,\ldots,x_n)=(\tilde{\varphi}(y',x_2,\ldots,x_n))_y$$

も原始帰納的である．

系 $f(x, x_2, \cdots, x_n)$ は原始帰納関数，$\varphi_i(x)$ $(i=2, \ldots, n)$ も与えられた原始帰納関数でつねに $\varphi_i(x)<x$ をみたすものとする．そのとき

$$\psi(x)=f(x, \psi(\varphi_2(x)), \psi(\varphi_3(x)), \ldots, \psi(\varphi_n(x)))$$

を満足する $\psi(x)$ は原始帰納関数である．

$\psi(x)$ が x より小さい値に対する ψ の値から原始帰納的に定義される関数ならばそれは原始帰納的であるということ．

［証明］ $\varphi_i(x)<x$ だから，

$$\psi(\varphi_i(x))=(\tilde{\psi}(x))_{\varphi_i(x)}.$$

したがって

$$\psi(x)=f(x, (\tilde{\psi}(x))_{\varphi_2(x)}, \ldots, (\tilde{\psi}(x))_{\varphi_n(x)}).$$

定理７により $\psi(x)$ は原始帰納的である．

11° 形式的自然数論との関係，表現定理

（１） 各数ごとの表現

述語 $P(x_1, \ldots, x_n)$ と形式的自然数論 N の論理式 $\mathrm{P}(\mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_n)$ があり，P は $\mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_n$ 以外に自由変数をもたないとする．任意の自然数 $x_1, \ldots, x_n$ に対し，

（１） $P(x_1, \ldots, x_n) \Longrightarrow \mathrm{N} \vdash \mathrm{P}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$　（$\bar{x}$ は数 x に対する数項）

（２） $\bar{P}(x_1, \ldots, x_n) \Longrightarrow \mathrm{N} \vdash \neg \mathrm{P}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$

が成り立つとき論理式 P は N において述語 P を各数ごとに表現する（numeral-wise represent）という．

もし，N が無矛盾ならば――実際 N_0 や N はそうなのだが――P が P を表現するとき

（３） $P(x_1, \ldots, x_n) \Longleftrightarrow \mathrm{N} \vdash \mathrm{P}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$

が成り立つ．

実際，$\mathrm{N} \vdash \mathrm{P}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ であるのに $P(x_1, \ldots, x_n)$ でない，すなわち $\bar{P}(x_1, \ldots, x_n)$

ならば(2)によって $N \vdash \neg P(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ となり，N は矛盾することになるからである．

（2） **関数の表現**

関数 $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ と $a_1, \ldots, a_n, b$ 以外に自由変数をもたない N の論理式 $P(a_1, \ldots, a_n, b)$ に対し，任意の $x_1, \ldots, x_n$ に対し

（1）′ $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = w \Longrightarrow N \vdash P(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n, \bar{w})$

（2）′ $N \vdash \exists ! y P(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n, y)$

が成り立つとき論理式 P は N において関数 $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ を各数ごとに表現するという．

N が無矛盾ならばさらに次のことがなりたつ．

（3）′ $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \neq u \Longrightarrow N \vdash \neg P(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n, \bar{u})$

（3）″ $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = w \Longleftrightarrow N \vdash P(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n, \bar{w})$

定理 9　原始帰納関数と述語は N_0 において，したがって N_1 において各数ごとに表現可能である．

各数ごとの表現可能の証明は割合いやっかいであって次の順序で行われる．

まず N の形式的論理式を内容的に解釈した述語，すなわち項に対応する多項式 t_1, t_2 によって $t_1 = t_2$ を作り，これから $\overline{}$，$\vee$，&，$\rightarrow$，(x)，(Ex) を有限回つけることによって得られる述語を算術的述語という．

（1）　$\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ を原始帰納関数とするとき，$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = w$ は算術的述語で表現されることを目標にする．

（2）　始関数に関しては

$\varphi(x) = x'$ のとき	$\varphi(x) = w \Longleftrightarrow w = x + 1$
$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = q$ のときは	$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = w \Longleftrightarrow w = q$
$\varphi_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$ のときは	$\varphi_i(x_1, \ldots, x_n) = w \Longleftrightarrow w = x_i$

だから算術的述語で表現される．

合成 $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \psi(\chi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \chi_m(x_1, \ldots, x_n))$ に対しては

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = w \Longleftrightarrow (Ey_1)\ldots(Ey_m)\begin{pmatrix} \chi_1(x_1, \ldots, x_n) = y_1 \\ \& \cdots\cdots\cdots \\ \& \ \chi_m(x_1, \ldots, x_n) = y_m \\ \& \ \psi(y_1, \ldots, y_m) = w \end{pmatrix}$$

だからやはり算術的述語で表現される．

帰納的に定義される関数が算術的述語で表現されることをいうにはゲーデルの β-関数というものが必要である．

（3）　ゲーデルの β-関数は次の性質をもつ関数である．

任意の自然数の有限列 $a_0, \ldots, a_n$ に対し，対 c, d が存在して

$$\beta(c, d, i) = a_i \ (i = 0, \ldots, n).$$

$\beta(c, d, i)$ は算術的述語で表現され，孫子の定理を用いて上の性質をもつことが保証される．

φ が

$$\begin{cases} \varphi(0, x_2, \ldots, x_n) = \psi(x_2, \ldots, x_n) \\ \varphi(y', x_2, \ldots, x_n) = \chi(y, \varphi(y, x_1, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n) \end{cases}$$

によって定義される場合を考える．

$$a_0 = \psi(x_2, \ldots, x_n)$$
$$a_1 = \chi(0, a_0, x_2, \ldots, x_n)$$
$$a_2 = \chi(1, a_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$a_y = \chi(y-1, a_{y-1}, x_2, \ldots, x_n)$$
$$w = a_y$$

とおく．$\beta(c, d, i) = a_i$ $(i = 0, \ldots, y)$ となるような c, d を定めると

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = w \Longleftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{l}(Ec)\,(Ed)\,[\beta(c,d,0) = \psi(x_2, \ldots, x_n) \\ \ \&\ (i)\,(i<y \rightarrow \beta(c,d,i+1) = \chi(i, \beta(c,d,i), x_2, \ldots, x_n)) \\ \ \&\ w = \beta(c,d,y)]\end{array}\right)$$

と書けるわけである.

（4） 各数ごとの表現定理は以上のことをNの中で形式的に展開することを通じて証明される．これ以上のことはここでは説明しない．関係文献を参照されたい.

文　献

• S. C. Kleene, *Introduction to Metamathematics*, North Holland Pub. Co., (1952).

これは当時までの原始帰納関数と述語，一般帰納関数と述語に関するもっともくわしい書物であり基本文献中の基本文献である．邦書では

• 広瀬健「計算論」朝倉書店（1975）

• 広瀬健「帰納的関数」共立出版

VIII　ゲーデルの不完全性定理

1°　超数学の算術化

われわれは基本記号から出発した．無定義記号の本質はその差異性のみにある．すなわち記号は相互に区別されることだけが本質的であり，それ自身の性質を問う必要はない．だからたとえば論理記号 $\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\exists$，$\forall$ の代わりに，相互に区別される限りにおいてこれを異なる素数 2, 3, 5, 7, 11, 13 であらわしてもよい．

この考えによってわれわれは基本記号であるところの（i）論理記号，（ii）カッコ，（iii）自由変数，（iv）束縛変数，（v）定数記号，述語記号，関数記号をすべて相異なる素数でおきかえる．この素数を対応する記号のゲーデル数（Gödel number）という．

基本記号の有限列 $X=(s_0, \ldots, s_k)$ および基本記号の列の列 $\widetilde{X}=(X_0, \ldots, X_l)$ に対してもある数を対応させ，全体として $\boldsymbol{N}$ の中に一対一に対応させる（すぐあとで見る）．

以上のゲーデル数化（Gödel numbering）を通じて超数学の対象たとえば項，論理式（これは記号列），証明図（これは列の列）は数の世界に転化され，「項である」，「論理式である」，「証明図である」等の超数学的命題は

$Tm[\mathrm{N}](x)$　（x は N の項のゲーデル数である）

$Fm[\mathrm{N}](x)$　（x は N の論理式のゲーデル数である）

$Prf[\mathrm{N}](x, y)$ $\left\{\begin{array}{l} x\text{は N の論理式 } X \text{ のゲーデル数であり，} y \text{ は } X \text{ に} \\ \text{いたる N の証明図 } Y \text{ のゲーデル数である} \end{array}\right\}$

という算術の命題に転化し，しかもこれらは原始帰納的述語となる．

「超数学は記号を対象とする一種の算術に他ならない」といったのはヒルベルト

であるがゲーデル数化を通して超数学は真正の算術になる.

これが超数学の算術化といわれるものであって不完全性定理の第一の契機である. 超数学の算術化はヒルベルトの形式主義と, それにともなうプランの必然的な結果である. ベルナイスは自分のうちにもやもやとした予感を分析して, たとえゲーデルがいなかったとしてもいつかかならず誰かによって同じ結果がもたらされただろうと述べている. これはゲーデルの天才を否定するものではない.

「自由とは必然性の洞察である」といったのはヘーゲルだが天才とは必然性を顕在化する能力である.

2° ゲーデル数化 (Gödel numbering)

自然数論 N の基本記号のゲーデル数を次のように定める (はじめに述べた通りに$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \exists, \forall$を 2, 3, 5, 7, 11, 13 に対応させてある.)

$\neg$	$\wedge$	$\vee$	$\rightarrow$	$\exists$	$\forall$
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
(	)	a_0	x_0	a_n	x_n
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
p_6	p_7	p_8	p_9	$p_{8(n+1)}$ $(n \geq 1)$	$p_{8(n+1)+1}$ $(n \geq 1)$
0	=	′	+	·	
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	
p_{10}	p_{11}	p_{12}	p_{20}	p_{28}	

一般の L に対しては L の定数, 述語, 関数記号が高々可算なら

$$\left.\begin{array}{l}\text{定数記号に対しては } p_{8(n+1)+2} \\ \text{述語記号に対しては } p_{8(n+1)+3} \\ \text{関数記号に対しては } p_{8(n+1)+4}\end{array}\right\} \text{の形の素数を対応させる.}$$

基本記号 s に対し，数 a が対応するとき，$gn: s \mapsto a$ または$\ulcorner s \urcorner = a$ と書き a を基本記号 s のゲーデル数という．

基本記号の列のゲーデル数． $X=(s_0, s_1, \ldots, s_k)$ において，$gn: s_i \mapsto a_i$ のとき X のゲーデル数を $gn: X \mapsto p_0^{a_0} p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$ によって定義する．

基本記号の列の列のゲーデル数． 列の列 $\widetilde{X}=(X_0, \ldots, X_l)$ において，$gn: X_i \mapsto x_i$ のとき $\widetilde{X}$ のゲーデル数を $gn: \widetilde{X} \mapsto p_0^{x_0} \cdots p_l^{x_l}$ によって定義する．

基本記号のゲーデル数化は一対一である．

記号列全体のゲーデル数化は素因数分解の一意性によって一対一である．

列の列全体のゲーデル数化も同じ理由で一対一である．

基本記号のゲーデル数は素数であり，列または列の列のゲーデル数は合成数であり，列のゲーデル数の素因数のベキ指数は素数であり，列の列の素因数のベキ指数は合成数であるからこれらのゲーデル数は混同されることはない．$\boldsymbol{N}$ の中に一対一に対応される．

任意の数が与えられたとき，それが基本記号のゲーデル数であるか，列のゲーデル数であるか，列の列のゲーデル数であるか，それらのいずれでもないかを判断する有限回で終わる手順（アルゴリズム）がある．

実際次に示すようにこの手続きは原始帰納的である．

3° 超数学の算術化の実行

(1)　　$FS[\mathrm{N}](x)$

$$\Longleftrightarrow x \text{ は } N \text{ の基本記号 (Fundamental Symbol) のゲーデル数である}$$

$$\Longleftrightarrow (E_i)_{i<x}(x=p_i \ \& \ i \leq 7) \vee (Ey)_{y<x}(x=p_{8(y+1)} \vee x=p_{8(y+1)+1})$$

$$\vee (x=p_{10}) \vee (x=p_{11}) \vee (x=p_{12}) \vee (x=p_{20}) \vee (x=p_{28})$$

$FS[N](x)$ は原始帰納的述語である．

$FS[L](x)$（x は L の基本記号のゲーデル数である）は $FS[\mathrm{N}](x)$ の

$$(x=p_{10}) \vee (x=p_{11}) \vee (x=p_{12}) \vee (x=p_{20}) \vee (x=p_{28})$$

の部分を

$$(Ey)_{y<x}(x=p_{8(y+1)+2} \vee x=p_{8(y+1)+3} \vee x=p_{8(y+1)+4})$$

でおきかえればよい．$FS[\mathrm{L}](x)$ は原始帰納的である．

（2） $Sq[\mathrm{N}](x) \Longleftrightarrow x$ は列 (Sequence) のゲーデル数である

$$\Longleftrightarrow (i)_{i<lh(x)} FS[\mathrm{N}]((x)_i)$$

$Sq[\mathrm{N}](x)$ は原始帰納的である．$Sq[\mathrm{L}](x)$ についても同様である．

$Sqsq[N](x) \Longleftrightarrow x$ は列の列のゲーデル数である

$$\Longleftrightarrow (i)_{i<lh(x)} Sq[\mathrm{N}]((x)_i)$$

$Sqsq[\mathrm{N}](x)$ は原始帰納的である．$Sqsq[\mathrm{L}](x)$ についても同様である．

（3） 列の結合

A，B は列で「A」$=a$，「B」$=b$ とする．結合 AB のゲーデル数は $a*b$ である．

（4） カッコ閉じ

列 X に対し「X」$=x$ とするとき，(X) のゲーデル数は $E(x)=2^{p_6}*x*2^{p_7}$.

（5） $FV(x) \Longleftrightarrow x$ は自由変数 (Free Variable) のゲーデル数である

$$\Longleftrightarrow (Ey)_{y<x}(x=p_{8(y+1)})$$

（6） $BV(x) \Longleftrightarrow x$ は束縛変数 (Bound Variable) のゲーデル数である

$$\Longleftrightarrow (Ey)_{y<x}(x=p_{8(y+1)+1})$$

$FV(x)$，$BV(x)$ は原始帰納的である．

（7） $Sb(x)\binom{a}{y}$　x, y は記号列 X, Y のゲーデル数，a は自由変数 a のゲーデル数とするとき，X にあらわれる a をすべて Y でおきかえた結果のゲーデル数をあらわす．

$Sb(x)\binom{a}{y}$ も原始帰納関数である．

（8）　$Cn(x,a) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \text{ は記号列 } X \text{ のゲーデル数，} a \text{ は自由変数 a の} \\ \text{ゲーデル数で } X \text{ は a をふくむ} \end{array}\right\}$

$$\Longleftrightarrow FV(a)\ \&\ Sq(x)\ \&\ Sb(x)\binom{a}{2^{p_{10}}} \neq x$$

（X が a をふくめば a を 0 でおきかえた結果は X と異なる）

$Cn(x,a)$ は原始帰納的である．

（9）　$Tm[\mathrm{N}](x) \Longleftrightarrow x$ は N の項のゲーデル数である

$$\begin{aligned} &\Longleftrightarrow (x=2^{p_{10}}) \vee (x=2^{(x)_0}\ \&\ FV((x)_0)) \\ &\quad \vee (Ex_1)_{x_1<x}[x=E(x_1)*2^{p_{12}}\ \&\ Tm[\mathrm{N}](x_1)] \\ &\quad \vee (Ex_1)_{x_1<x}(Ex_2)_{x_2<x}[Tm[\mathrm{N}](x_1)\ \&\ Tm[\mathrm{N}](x_2) \\ &\qquad \&\ (x=E(x_1)*2^{p_{20}}*E(x_2) \\ &\qquad\quad \vee x=E(x_1)*2^{p_{28}}*E(x_2))] \end{aligned}$$

X は項である $\Longleftrightarrow X$ は 0 であるか，自由変数であるか，すでに構成された項 X_1 があって X が $(X_1)'$ の形であるか，すでに構成された項 X_1, X_2 があって X は $(X_1)+(X_2)$ であるか $(X_1)\cdot(X_2)$ であるかであることを忠実に書き下したものである．このとき X のゲーデル数は X_1，X_2 のゲーデル数よりつねに大きい．$Tm[\mathrm{N}](x)$ は x より小さい x_1，x_2 に対する $Tm[\mathrm{N}](x_1)$，$Tm[\mathrm{N}](x_2)$ から累積帰納法によって定義されるから原始帰納的である．

$Tm[\mathrm{L}](x)$（x は L の項のゲーデル数である）は L の述語・関数記号（そのゲーデル数を x とする）の変数の個数が x の原始帰納関数として与えられているという条件のもとで $Tm[\mathrm{L}]$ は原始帰納的となる．

（10）　$N(x)=x$ に対応する数項 $\bar{x}=0^{(x)}$ のゲーデル数．

$$N(0)=2^{p_{10}} \qquad N(x+1)=E(N(x))*2^{p_{12}} \qquad \text{（原始帰納関数）}$$

……

(20)　$Fm[\mathrm{N}](x) \Longleftrightarrow x$ は N の論理式のゲーデル数である.

(21)　$Axl(x) \Longleftrightarrow x$ は N の論理式で論理の公理のゲーデル数である

……

(28)　$Ax[\mathrm{N}_0](x) \Longleftrightarrow x$ は N_0 の公理のゲーデル数である

(29)　$Ax[\mathrm{N}_1](x) \Longleftrightarrow x$ は N_1 の公理のゲーデル数である

(30)　$Prf[\mathrm{N}_0](x, y) \Longleftrightarrow$ (x は N の論理式 X のゲーデル数，y は N_0 における X に至る証明図 Y のゲーデル数である)

(31)　$Prf[\mathrm{N}_1](x, y) \Longleftrightarrow$ (30) の N_0 の代りに N_1 としたもの

一般の ⟨L, T⟩ に関しても関数，述語記号の変数の個数が原始帰納的に与えられ, $Ax[\mathrm{T}](x)$ (x は T の公理のゲーデル数である) が原始帰納的なら $Prf[\mathrm{T}](x, y)$ は原始帰納的となる.

(32)　$Pr[\mathrm{N}_0](x) \Longleftrightarrow x$ は N_0 で証明可能な論理式のゲーデル数である

$\Longleftrightarrow (Ey)\, Prf[\mathrm{N}_0](x, y)$

$Pr[\mathrm{N}_1](x)$　　上の N_0 を N_1 でおきかえたもの

これはもはや原始帰納的でなく，一般帰納的ですらない.

(33)　人をある矛盾する命題をあらわす文のゲーデル数とする．たとえば T が N_0 をふくむときには $\bar{1}=\bar{0}$ のゲーデル数とする．このとき

$$Con[\mathrm{T}] \Longleftrightarrow \mathrm{T}\ \text{は無矛盾である} \Longleftrightarrow \overline{Pr}[\mathrm{T}](\text{人})$$

と書ける.

延々と続く仕事であった．飛んだ番号のところはたとえば $R_1(x, y, z)$ (x, y, z は論理式 X, Y, Z のゲーデル数であり，Z は X, Y の推論規則 R1 による下式である) や，$R_2(x, y)$，$R_3(x, y)$ が出てくる.

ゲーデルは上のことを遂行するために原始帰納関数と述語の理論をすべて構築せねばならなかった．必要なことは労をいとわずきちんとやること，この研究者としての最低限の，だがもっとも基本的な資質をゲーデルは完璧な形でもっていたことを示している．

実際，どんな本や論文にもミスや省略がある——非本質的なものであっても読む方にしては困るのだ——しかしゲーデルの論文にはそれがない（1931年の論文にも，1940年のプリンストン講義録にも）．

4° 不完全性定理の言明

言語 L と L 上の公理系 T のペア ⟨L, T⟩ を考える．

定理の成り立つ条件

⟨L, T⟩ は実質的に N_0 を含む ω–無矛盾な原始帰納的公理系とする．

（i）　実質的に N_0 をふくむとは N の言語に属する記号に対応するものが ⟨L, T⟩ において定義され，N の論理式 A に対し，L の論理式 A*が対応し，N の公理 A に対する A* が T で証明可能なことをいう．以下では A と A* を区別せず，単に N 上の論理式という．

（ii）　⟨L, T⟩ が ω–矛盾するとは，N の論理式 A(a)（正確には，それに対応する L 上の論理式 A*(a)）があって，$(x)(\mathrm{T}\vdash \mathrm{A}(\bar{x}))$ かつ $\mathrm{T}\vdash \neg\forall x\,\mathrm{A}(x)$ となること．ω–無矛盾とはこうはならないこと．

一つでも証明不可能な論理式があれば無矛盾なのであるから，ω–無矛盾ならば無矛盾である．

（iii）　原始帰納的公理系であるとは $Ax[\mathrm{T}](x)$（x は T の公理のゲーデル数である）が原始帰納的述語であること．このときは $Prf[\mathrm{T}](x, y)$（y はゲーデル数 x の論理式に至る T の証明図のゲーデル数である）が原始帰納的となる．この条件は $Ax[\mathrm{T}](x)$ が一般帰納的である場合に一般化できる．

定理の言明

$\langle L, T \rangle$ は実質的に N_0 をふくむ ω-無矛盾な帰納的公理系とする．そのとき

（1） $T \vdash A$ でも $T \vdash \neg A$ でもないような N の文 A が存在する．(第一不完全性)

（2） 直観的内容的には真であるが T で証明不可能な文が存在する．

また $(x)(T \vdash A(\bar{x}))$ であるが $T \vdash \forall x A(x)$ でないような N の論理式 A が存在する．(ω-不完全性)

（3） T が無矛盾であることを主張する N の文 Con[T] は，T が実質的に N_1 をふくむ場合には T で証明されない．(第二不完全性)

（4） 無矛盾だが ω-矛盾する公理系が存在する．

（5） L 上の論理式 A に対し $\vdash A$ in H は決定不可能である．すなわち，$\vdash A$ in H か否かを決定するアルゴリズムはない．

この結果を見て驚嘆しないものがあろうか．

（3） (第二不完全性)に関してオッペンハイマーは人間理性の限界を明らかにしたものと評した．形式的体系なるものの限界を明らかにしたものには違いないが，そのことを証明してみせるということは逆に人間理性の及ぶ領域が限りないものであることを示しているともいえるのではないか．

5° $T \vdash Q \leftrightarrow \neg Pr[T](\bar{q})$ (q は Q のゲーデル数)となる文 Q の構成

上式をみたす Q は自分自身の証明不可能を主張する文と同値になるものであって，これは原始帰納関数の理論，超数学の算術化と並んで不完全性定理を成立させる第三のポイントである．

この Q の構成はあとまわしにして定理そのものの証明に進もう．

6° 定理の証明

(1)の証明．5° の Q をとる．

（i） T が無矛盾ならば $T \vdash Q$ でない．$T \vdash Q$ ならば Q (そのゲーデル数 q)

に至るある証明図（そのゲーデル数 k）があって $Prf[\mathrm{T}](q,k)$ が成立つ．$Prf[\mathrm{T}]$ を各数ごとに表現する N の論理式を $\mathrm{Prf[T](a,b)}$ とすれば，各数ごとの表現定理によって $\mathrm{N_0 \vdash Prf[T]}(\bar{q},\bar{k})$．∃導入によって $\mathrm{N_0 \vdash \exists y Prf[T]}(\bar{q},\mathrm{y})$．T は $\mathrm{N_0}$ より強いから $\mathrm{T \vdash Pr[T]}(\bar{q})$．$\mathrm{T \vdash Q \leftrightarrow \neg Pr[T]}(\bar{q})$ だったから，$\mathrm{T \vdash \neg Q}$．これは T の無矛盾性に反する．ゆえに $\mathrm{T \vdash Q}$ ではない．

（ii） T が ω-無矛盾ならば $\mathrm{T \vdash \neg Q}$ ではない．$\mathrm{T \vdash Q}$ ではないのだから

$$(y)\overline{Prf}[\mathrm{T}](q,y).$$

各数ごとの表現定理によって．

$$\text{(a)} \qquad (y)(\mathrm{T \vdash \neg Prf[T]}(\bar{q},\bar{y})).$$

$\mathrm{T \vdash \neg Q}$ ならば，5° より $\mathrm{T \vdash \neg Q \leftrightarrow Pr[T]}(\bar{q})$ だから，$\mathrm{T \vdash Pr[T]}(\bar{q})$．したがって $\mathrm{T \vdash \exists y Prf[T]}(\bar{q},\mathrm{y})\ (\leftrightarrow \neg \forall \mathrm{y} \neg \mathrm{Prf[T]}(\bar{q},\mathrm{y}))$．$\mathrm{T \vdash \neg \forall y \neg Prf[T]}(\bar{q},\mathrm{y})$ と（a）は T が ω-矛盾することを示しており仮定に反する．ゆえに $\mathrm{T \vdash \neg Q}$ ではない．

（2）の証明．$(y)\overline{Prf}[\mathrm{T}](q,y)$ は $\mathrm{T \vdash Q}$ でないことを述べているから正しい命題であるが，これを形式化した $\forall \mathrm{y} \neg \mathrm{Prf[T]}(\bar{q},\mathrm{y})$ すなわち Q は T で証明不可能である．また（1）の（ii）において $(y)(\mathrm{T \vdash \neg Prf[T]}(\bar{q},\bar{y}))$ であるが $\mathrm{T \vdash \forall y \neg Prf[T]}(\bar{q},\mathrm{y})$ でない．（ω-不完全）．

同じタイプの問題だから（4）を先にやる．

（4）の証明．¬Q すなわち $\neg \forall \mathrm{y} \neg \mathrm{Prf[T]}(\bar{q},\mathrm{y})$ を新しい公理として T に付加した系を T′ とする．$\mathrm{T' = T \cup \{\neg Q\}}$．T′ は無矛盾だが ω-矛盾する．

（i） T′は無矛盾である．$\mathrm{T \cup \{\neg Q\}}$ が矛盾すれば $\mathrm{T \vdash Q}$ となるが（1）（i）によってこうはならない．

（ii） T′は ω-矛盾する，（1）（ii）で述べたことにより $(y)(\mathrm{T \vdash \neg Prf[T]}(\bar{q},\bar{y}))$．これと $\mathrm{T' \vdash \neg} Q$ は ω-矛盾する．

（3）の証明．（1）の（i）は「T が無矛盾」→「$\mathrm{T \vdash Q}$ でない」，$\mathrm{Con[T]} \rightarrow (y)\overline{Prf}(q,y)$，すなわち $\mathrm{Con[T] \rightarrow Q}$ の証明であった．この証明そのものを $\mathrm{N_1}$ の中で形式化する

ことができて

$$\mathrm{N}_1 \vdash \mathrm{Con}[\mathrm{T}] \to \mathrm{Q}$$

が成立つ．たとえばこの証明中，表現定理の算術化は $\mathrm{P}(\mathrm{a}_1, \ldots \mathrm{a}_n)$ のゲーデル数を $e, \mathrm{a}_1, \ldots \mathrm{a}_n$ のゲーデル数を $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ とするとき

$$P(x_1, \ldots, x_n) \Longrightarrow Pr[\mathrm{N}_0]\left(Sb(e)\begin{pmatrix} \alpha_1, & \ldots, & \alpha_n \\ N(x_1), & \ldots, & \mathrm{N}(x_n) \end{pmatrix}\right)$$

となるがこれをさらに形式化したものの N_1 での証明可能性が問題になる．ここでは形式系内の数学的帰納法が必要になるので T が N_1 をふくむことが要請されるのである．

ゲーデルの論文にはＩという番号が表題の末尾についている．上のことをきちんとやるのは大仕事だからまずＩで簡単に説明しておいて，Ⅱで改めてきちんと証明しようと考えたらしい．しかしストレスによる強度の神経衰弱と胃病のためにそれは果たされずⅡは未発に終った．Hilbert-Bernays 2 巻にちゃんと証明してある．

要するに $\mathrm{N}_1 \vdash \mathrm{Con}[\mathrm{T}] \to \mathrm{Q}$，T が N_1 をふくむなら $\mathrm{T} \vdash \mathrm{Con}[\mathrm{T}] \to \mathrm{Q}$ は成立つのである．だからもし $\mathrm{T} \vdash \mathrm{Con}[\mathrm{T}]$ ならば，$\mathrm{T} \vdash \mathrm{Q}$ となり，(1)に反するから $\mathrm{T} \vdash \mathrm{Con}[\mathrm{T}]$ ではない．

(5)の証明（上江洲氏による）．L 上の論理式 φ に対して $\vdash \varphi$ in H が決定可能だとする．(φ が文のときを考えれば十分である)．N_0 の極大無矛盾拡大 T' の作り方を想起しよう．

N_0 の公理は有限個だから公理を一つの文 $\tilde{\mathrm{N}}_0$ であらわそう．L 上の文の全体を $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ とする．$\mathrm{T}_0 = \{\tilde{\mathrm{N}}_0\}$．$\mathrm{T}_n = \{\tilde{\mathrm{N}}_0, \chi_0, \ldots, \chi_{n-1}\}$ のとき，$\mathrm{T}_n \cup \{\varphi_n\}$ が無矛盾ならば $\chi_n := \varphi_n$ とし， そうでなければ $\chi_n := \neg \varphi_n$ とし，$\mathrm{T}_{n+1} = \mathrm{T}_n \cup \{\chi_n\}$，$\mathrm{T}' = \bigcup_n \mathrm{T}_n$ とおくのであった．

このとき任意の文 φ に対し，$\varphi = \varphi_n$ とすると，

$$\varphi \in T' \Longleftrightarrow \varphi_n \in \mathrm{T}' \Longleftrightarrow \mathrm{T}_n \cup \{\varphi\} \text{は無矛盾} \Longleftrightarrow \mathrm{T}_n \vdash \neg \varphi_n \text{ でない}$$

$$\Longleftrightarrow \tilde{N}_0 \wedge \chi_0 \wedge \ldots \wedge \chi_{n-1} \rightarrow \neg \varphi_n \text{ in H} \text{ でない}$$

だから $\vdash \varphi$ in H が決定可能ならば $\varphi \in T'$ は決定可能である．すなわち T′ は帰納的である．

これは一般帰納的ということだが，T′が ω–無矛盾だとすれば不完全性定理の成立つ条件はすべてみたされる．(ロッサーの定理で示されるように ω–無矛盾の仮定すら必要ない)．だから不完全性定理によって $T' \vdash \varphi$ でも $T' \vdash \neg\varphi$ でもない文 φ が存在する．しかるに極大無矛盾拡大というものは任意の文 φ に対して $\varphi \in T'(T' \vdash \varphi)$ か $\neg\varphi \in T'(T' \vdash \neg\varphi)$ であったのだからこれは矛盾である．

7° 不完全性定理の背景

ゲーデルがいかにして不完全性定理に到達したかの推理である．何しろ上に見たように不完全性定理は尋常一様な定理ではないのであるから，これを論じて理解しておかないと，すべては天才のなせる業ということになって少しも定理を理解したことにならない．

きっかけはリシャールパラドクスの形式主義的再構成と，そこにおける“A は真”を“A は証明可能”におきかえることにある．このことはゲーデル自身が序文で示唆しており，多くの人も指摘している．

(1) N の文の真偽について

次のように N の文の真偽を定義することができる．

まず N の閉項(自由変数を含まぬ項) t に対してはかならずある数 n が対応することに注意する．これを $\mathrm{val}(t)=n$ と書こう．原子的な文 $t_1=t_2$ に対しては $\mathrm{val}(t_1)=\mathrm{val}(t_2)$ のとき真，そうでないとき偽であると定める．

文 A, B の真偽が定まったとき，$\neg A, A\wedge B, A\vee B, A\rightarrow B$ の真偽は真偽表によって定める．

$\forall x A(x)$, $\exists x A(x)$ の真偽は，

$$\forall x\,A(x) \text{が真} \iff \text{すべての } x \text{ に対して } A(\bar{x}) \text{が真}$$

$$\exists x\,A(x) \text{が真} \iff \text{ある } x \text{ があって } A(\bar{x}) \text{が真}$$

と定義するのが当然だろう．

以上は N のスタンダードモデル $\boldsymbol{N}$ を$\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \ldots\}$と書くとき，$\boldsymbol{N} \models A$ ということと同値である．

またあきらかに

$$N_0 \vdash A \Longrightarrow A \text{は真}$$

が成立つ．もちろん真偽の概念は有限の立場を越えたものである．

（2）リシャールパラドクスとその形式主義的再構成

a を特定の自由変数とするとき a-論理式（a のみを自由変数とする論理式）は高々可算だからこれを並べて

$$A_0(a), A_1(a), \cdots, A_n(a), \cdots$$

と書く．このとき任意の n に対し，

$$\neg A_n(\bar{n}) \iff A(\bar{n}) \quad (\neg A_n(\bar{n}) \text{が真} \longleftrightarrow A(\bar{n}) \text{が真のこと})$$

となるような a-論理式 A(a) は存在しない．（もし存在すればある $A_k(a)$ となるが，このときは $\neg A_k(\bar{k}) \iff A_k(\bar{k})$ となって矛盾する）．

（3）関数 $s(x, y)$

3° 超数学の算術化の実行の（7）にあらわれた関数 $Sb(x)\binom{a}{y}$ を用いて

$$s(x, y) = Sb(x)\binom{\alpha}{N(y)}, \text{ ここに } \alpha \text{ は a のゲーデル数}$$

とおく．$x = \ulcorner A(a_0) \urcorner$ のとき $\ulcorner A(\bar{y}) \urcorner = s(x, y)$ となるものである．

$s(x, y)$ は原始帰納関数だから，これを各数ごとに表現する N の論理式 $S(a, b, c)$ がある．すなわち

$$s(x, y) = z \Longrightarrow N_0 \vdash S(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$$

$$\text{すべての } x, y \text{ に対して } N_0 \vdash \exists! z S(\bar{x}, \bar{y}, z)$$

T は N_0 をふくむから上式の N_0 を T とした式にも成立つ．

（４）「真である」の「証明可能である」によるおきかえ

$\neg A_n(\bar{n})$ が真（$A_n(\bar{n})$ は真でない）を $T \vdash A_n(\bar{n})$ でないにおきかえることを考えよう．このときは

$$T \vdash A_n(\bar{n}) \text{ でない} \Longleftrightarrow A(\bar{n}) \text{ は真}$$

をみたす論理式 A(a) が存在することを示そう．

A_n(a) の番号をつけかえて，A(a) のゲーデル数が n のとき，A(a) のことを A_n(a) と書くことにしよう．すなわち$\ulcorner A_n(a) \urcorner = n$ とするのである．このときは$\ulcorner A_n(\bar{n}) \urcorner = s(n, n)$ だから

$$T \vdash A_n(\bar{n}) \text{ でない} \Longleftrightarrow \overline{Pr[T]}(s(n, n))$$

となり右辺を表現する論理式は

$$\exists z (S(a, a, z) \wedge \neg Pr[T](z))$$

となるだろう．このゲーデル数を p とすれば $s(x, y)$ の定義より

$$\exists z (S(\bar{p}, \bar{p}, z) \wedge \neg Pr[T](z))$$

のゲーデル数は $s(p, p)$（$= q$ とおく）である．このとき $N_0 \vdash S(\bar{p}, \bar{p}, \bar{q})$ であり，$N_0 \vdash \exists! z S(\bar{p}, \bar{p}, z)$ だから，

$$N_0 \vdash \exists z (S(\bar{p}, \bar{p}, z) \wedge \neg Pr[T](z)) \leftrightarrow \neg Pr[T](\bar{q})$$

が成立つ．$\exists z (S(\bar{p}, \bar{p}, z) \wedge \neg Pr[T](z))$ を Q とすれば$\ulcorner Q \urcorner = q$ であって

$$T \vdash Q \leftrightarrow \neg Pr[T](\bar{q})$$

これが問題の式 5° であった．

8° ロッサー (Rosser) フィファマン (Feferman) の結果

ロッサーは ω-無矛盾性の仮定なしに無矛盾の仮定だけから不完全性定理の証明を与えた (1936). その際, *Prf*[T] (*x*, *y*) を各数ごとに表現するこれまでの Prf[T] (a, b) と異なる $\mathrm{Prf}^{\mathrm{R}}$[T] (a, b) を用いるのだが, これに基づいて無矛盾性を形式化して $\mathrm{Con}^{\mathrm{R}}[\mathrm{N}_1]$ を作るときは $\mathrm{N}_1 \vdash \mathrm{Con}^{\mathrm{R}}[\mathrm{N}_1]$ となる. (Kreisel によって指摘された. 彼はしばしば他人の論文の中に当人の意図した以上のことを見出す).

これに着目した Feferman は $Prf[\mathrm{N}_1](x, y)$ でなく, より基礎的な $Ax[\mathrm{N}_1](x)$ をこれまでと異なる $\mathrm{Ax}^*[\mathrm{N}_1](\mathrm{a})$ によって表現するとき, これにもとづく $\mathrm{Con}^*[\mathrm{N}_1]$ に対しては $\mathrm{N}_1 \vdash \mathrm{Con}^*[\mathrm{N}_1]$ であることを示した (1960).

これらは原始帰納的述語を各数ごとに表現する論理式の多義性, それにともなう第 2 不完全性の相対的性格を示すものである (入門 4 章参照).

不完全性と決定不可能性の密接な関連については一般帰納関数を導入したあとで立ち帰ることにする.

文　献

原論文

- Kurt Gödel, *Über formal unentscheilbare Sätze der Principia mathematica und verwandter Systeme* I. (翻訳, 広瀬・横田の書にあり)

ロッサー, フィファマンの論文は

- Rosser, *Extension of some theorems of Gödel and Church*, Journal of Symbolic Logic, vol. 1 (1936), 87–91.
- Feferman, *Arithmetization of metamathematics in general setting*, Fund. Math., vol. 49 (1960), 35–92.
- 前原昭二「数学基礎論入門」朝倉書店
- 広瀬健, 横田一正「ゲーデルの世界——完全性定理と不完全性定理——」海

鳴社

- 吉永良正「ゲーデル・不完全性定理——理性の限界の発見——」講談社（ブルーバックス）

IX 一般帰納的関数

1° μ-帰納関数

原始帰納関数の定義式(I)-(V)にさらに(VI)を加えることによって拡張することを考えよう.

μ-作用素

$n+1$ 変数述語 $R(x_1, \ldots, x_n, y)$ に対し，もし $(Ey)R(x_1, \ldots, x_n, y)$ が成り立つならば，$R(x_1, \ldots, x_n, y)$ が成り立つような y の最小値を

$$\mu y R(x_1, \ldots, x_n, y)$$

と書く．そのような y がないとき，すなわち $(\overline{Ey})R(x_1, \ldots, x_n, y)$ である場合には $\mu y R(x_1, \ldots, x_n, y)$ は定義されない.

定義式(VI) $n+1$ 変数関数 $\chi(x_1, \ldots, x_n, y)$ に対し，条件

(1) $$(x_1)\ldots(x_n)(Ey)(\chi(x_1, \ldots, x_n, y)=0)$$

が成り立つとき，

(2) $$\varphi(x_1, \ldots, x_n)=(\mu y)(\chi(x_1, \ldots, x_n, y)=0)$$

を作ること.

μ-帰納(的)関数とは始関数(I),(II),(III)から出発し，合成(IV)，帰納的定義(Va),(Vb)および(VI)を有限回適用して得られる関数のことである．μ-帰納関数は計算可能である．(VI)において χ が計算可能なら条件(1)によって任意の $x_1, \ldots, x_n$ に対して

$$\chi(x_1, \ldots, x_n, 0), \chi(x_1, \ldots, x_n, 1), \chi(x_1, \ldots, x_n, 2), \cdots$$

を次々に計算していくと，$\chi(x_1, \ldots, x_n, y)=0$ となる y にかならず遭遇するが，そ

の最初の y が $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ に他ならない．そしてこの過程は有限回で終わる．

2° ゲーデルの示唆と種々の一般化の試み

計算可能関数を，原始帰納関数をこえて一般的に定義しようという試みが1935年から1936年にかけていっせいに出現する．すなわち

チャーチ(Church)の λ-定義可能関数 (λ-definable)　(1935)

クリーニ(Kleene)の一般帰納関数 (general recursive —)　(1936)

チューリング(Turing)の計算可能関数 (computable —)　(1936)

ゲーデル(Gödel)の算定可能関数 (reckonable —)　(1936)

ポスト(Post)の正規系 (normal system)　(1943)

がそれらである．

第一に重要なことは，これらの定義はいずれも

「計算可能関数とはアルゴリズムが存在するような関数のことである」

としたゲーデルの示唆（1933のプリンストン講義）にもとづいていることである．

この講義を聞いた人の中にチャーチ，クリーニ，ロッサーがいた．これらの定義ではいずれも $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ の値 y が一義的に定まる仕方に関しては一切ふれず，値が一義的に定まるようなアルゴリズムがあるという定義の形をとっている．μ-帰納関数(VI)の定義において下から捜して行くアルゴリズムの存在条件(1)の検討には一切ふれないのと同様である．

そしてアルゴリズムとして何を選ぶかによってチャーチ，クリーニ，チューリング，ゲーデルのそれぞれの異なる定義となるのであって決して上のゲーデルの示唆は同義反復ではない．

第二に注目すべきことは，上の諸定義がすべて同値になり，それが μ-帰納的関数の概念に一致することがはやばやとわかったことであった．以下，クリーニの一般帰納関数，ゲーデルの算定可能関数，チューリングの計算可能関数について簡単に説明する．他の定義についてはデーヴィス「計算の理論」（および赤摂也氏の付

録）を見られたい．

3° K-一般帰納的，G-算定可能的，T-計算可能的関数

（1）K-一般的帰納関数

変数記号 $a_0, a_1, a_2, \ldots$ と関数記号 $f_0, f_1, f_2, \cdots$，（ ）′（次のもの），定数記号 0，および等号＝が与えられ，これから項，とくに x に対応する数項 $\bar{x}$ が定義される．

$t_1 = t_2$（t_1, t_2 は項）を方程式（equation）といい，方程式の有限集合を方程式系（system of equations）という．

推論図

代入 $\dfrac{X_1}{X_2}$ 　X_1 は方程式であり，X_2 は X_1 のある変数記号を，すべてある数項 $\bar{n}$ でおきかえて得られる式である．

置換 $\dfrac{X_1 \quad X_2}{X_3}$ 　X_1 は $r = s$ の形の方程式であり，X_2 は $h(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) = \bar{x}$（$h$ はある関数記号）の形の方程式である．X_3 は X_1 の s にあらわれる $h(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ をすべて $\bar{x}$ でおきかえてできる式である．

演繹（図）とは方程式系 E から出発し，代入と置換をくりかえして方程式 X に達する樹形，あるいは証明図と平行的にいえば，X で終わる方程式の有限列であって各方程式は E に属するか，それに先行する方程式の代入または置換による下式であるようなものと定義される．このとき $E \vdash X$ と書く．

関数 $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ が一般帰納的であるとは，φ に対応する関数記号 f とそれを含む方程式系 E が存在して任意の $x_1, \ldots, x_n$ に対し

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = y \Longleftrightarrow E \vdash f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) = \bar{y}$$

となることである．

（2）G-算定可能関数

$\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ が G-算定可能関数であるとは自然数論 N の論理式 $\mathrm{P}(\mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_n,)$ が存在して，任意の $x_1, \ldots, x_n$ に対し，

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = y \Longleftrightarrow \mathrm{N}_0 \vdash \mathrm{P}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n, \bar{y})$$

となることである．

E として原始帰納関数の定義式の集合をとることにより，原始帰納関数が K-一般帰納的関数であることがわかる．またそれらが G-算定可能関数であることも各数ごとの表現定理から明らかである．

（3）T-計算可能関数

チューリング機械（厳密には決定性チューリング機械）はアルファベット（記号の有限集合），コマに分けられ一方向に無限にのびたテープ，ヘッド（テープのどれかのコマを見ている）よりなる．

機械は各時点で有限個の状態 $q_0, q_1, \ldots, q_m$ の一つをとる．

4 項系列とは

（i）$q_iS_jS_kq_l$　　（ii）$q_iS_jLq_l$　　（iii）$q_iS_jRq_l$

の形の列であって次の動きを指示する．

（i）時点 t で機械は状態 q_i であって，ヘッドが見ているコマにある記号が S_j のとき時点 $t+1$ では S_j を S_k に変え状態 q_l に移る．

（ii）時点 t で状態 q_i，ヘッドが見ているコマにある記号が S_j のとき，時点 $t+1$ ではヘッドは一コマ左に動き，状態 q_l に移る．

（iii）同じく時点 t で状態 q_i，ヘッドの見ている記号が S_j のとき，ヘッドは一コマ右に動き，状態 q_l に移る．

（iv）時点 t で同じ状況 q_i，S_j であり，q_iS_j にはじまる 4 項系列がないとき時点 $t+1$ で機械は止まる．各時点 t での機械の状況は $P_tq_iQ_t$ であらわされる．「P_tQ_t は時点 t でのテープの内容であり，状態は q_i，ヘッドは Q_t の左端を見ている」ことをあらわす．この列の列（$t=0, 1, 2\cdots$）を時点

系列という．

関数 $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ がチューリング計算可能であるとは，チューリング機械（有限個の 4 項系列）があって任意の $x_1,\ldots,x_n$ に対し時点 0 でテープの内容が $\bar{x}_1B\bar{x}_2\cdots B\bar{x}_n$（ここに $\bar{x}$ は 1 が $x+1$ 個並んだもの，B はブランク記号），状態は初期状態 q_0，ヘッドはテープの左端を見ているとき，4 項系列に従って作動するとき有限時間で止まり，そのときのテープ上の 1 の個数がちょうど $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ であることである．

Ⅶ　原始帰納的関数のはじめにのべたアルゴリズム，入力-計算過程，出力の言葉で説明すると定義しようとする関数を特定するアルゴリズム E は

K-一般帰納関数では方程式系 E

G-算定可能関数では N の論理式 $P(\mathrm{a}_1,\ldots,\mathrm{a}_n,\mathrm{b})$

T-計算可能関数では 4 項系列の集合

入力 $x_1,\ldots,x_n$ に対する計算過程 Y は

K では $E\vdash f(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n)=\bar{y}$ の演繹図

G では $\mathrm{N}_0\vdash \mathrm{P}(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n,\overline{w})$ の証明図

T では時点系列 $P_tq_iQ_t$（$t=0,1,2,\cdots$）

が対応する．

これから μ-帰納関数およびこれと同値な K-一般帰納的関数，G-算定可能関数，T-計算可能関数のことを一括して一般帰納関数といい，表現関数が一般帰納的な述語のことを一般帰納的述語と呼ぶことにする．

4° チャーチの提唱

計算可能関数をできるだけ一般的に定義しようとした試みの結果得られたものがすべて同値であったこと，さらにこれを拡張しようとする企てがすべて失敗したこと，それとこれまで知られている計算可能関数がすべて一般帰納的関数であることからチャーチ（Church）は次のテーゼを提唱した（1936）．

計算可能関数とは一般帰納関数のことであり，決定可能述語とは一般帰納的述語のことである.

ところで計算可能という概念は，アルゴリズムという常識的で経験的な観念をもとに成立っているが，一方一般帰納的という概念は数学的に（または超数学的に）厳密に定義された概念であるから，この両者を同一視することはきわめて大胆な提唱であり，根拠は指摘できても原理的に証明できないことがらで，いわば「ホモサピエンスの計算能力」に対する仮説といった性格のものである．反対する人もいるが現在にいたるまで納得できる反例はなく，広く承認されている.

5° 標準形定理と枚挙定理

標準形定理 (**Normal Form Theorem**, Kleene, 1936)

$n+2$ 変数の原始帰納的述語 $T_n(z, x_1, \ldots, x_n, y)$ および 1 変数原始帰納関数 $U(y)$ が存在して次の性質をもつ.

任意の一般帰納関数 $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ に対し，ある e が存在して

（1）　$(x_1)\cdots(x_n)(Ey)\,T_n(e, x_1, \ldots, x_n, y)$,

（2）　$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = U(\mu y T_n(e, x_1, \ldots, x_n, y))$.

枚挙定理 (**Enumeration Theorem**, Kleene, 1943)

任意の $n+1$ 変数一般帰納的述語 $R(x_1, \ldots, x_n, y)$ に対し，数 e，f が存在して

（1）　$(Ey)R(x_1, \ldots, x_n, y) \Longleftrightarrow (Ey)\,T_n(e, x_1, \ldots, x_n, y)$,

（2）　$(y)R(x_1, \ldots, x_n, y) \Longleftrightarrow (y)\,\overline{\mathrm{T}}_n(f, x_1, \ldots, x_n, y)$.

標準形定理の意味

e は $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ を特定するアルゴリズム（K では方程式系，G では N の論理式，T では 4 項系列の集合）のゲーデル数をあらわす.

$T_n(e, x_1, \ldots, x_n, y)$ は「入力 $x_1, \ldots, x_n$ に対してゲーデル数 e のアルゴリズムによって計算したときの計算過程 Y のゲーデル数が y である」ことを表わす.

$U(y)$ は $x_1, \ldots, x_n$ に対する計算過程のゲーデル数 y から出力 $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ を取り出す操作を表す.

(1)はアルゴリズム e に対しては任意の入力 $x_1, \ldots, x_n$ に対して計算過程 y が存在することを意味する.

(2)はそのアルゴリズムによって計算した結果が $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ に等しいことを表わす.

枚挙定理に移る.

$R(x_1, \ldots, x_n, y)$ は一般帰納的述語, その表現関数を $\chi(x_1, \ldots, x_n, y)$ とすれば χ は一般帰納関数である.

$$\mu y R(x_1, \ldots, x_n, y) = \mu y(\chi(x_1, \ldots, x_n, y) = 0)$$

は $(Ey) R(x_1, \ldots, x_n, y)$ のときかつそのときにかぎり計算できる (値が定まる) 部分帰納関数のアルゴリズムを定める. そのアルゴリズムのゲーデル数を e とすれば

$$\begin{aligned}(Ey) R(x_1, \ldots, x_n, y) &\Longleftrightarrow (\mu y) R(x_1, \ldots, x_n, y) \text{ の値が定まる} \\ &\Longleftrightarrow \text{その計算過程が存在する} \\ &\Longleftrightarrow (Ey)\, T_n(e, x_1, \ldots, x_n, y)\end{aligned}$$

と書ける. ところで原始帰納的述語に対する場合と同様にして $R(x)$ が一般帰納的述語ならばその否定 $\bar{R}(x)$ も一般帰納的述語である. したがって枚挙定理の(1)によって, ある f があって

$$(Ey) \bar{R}(x_1, \ldots, x_n, y) \Longleftrightarrow (Ey)\, T_n(f, x_1, \ldots, x_n, y)$$

となる. 両辺の否定をとって

$$(y) R(x_1, \ldots, x_n, y) \Longleftrightarrow (y)\, \overline{T_n}(f, x_1, \ldots, x_n, y)$$

これが枚挙定理(2)である.

6° G-算定可能関数についての定理の証明

（1）ゲーデル数化からの転用

（i）　数 x に対する数項 $\bar{x}=0^{(x)}$ のゲーデル数を $N(x)$ であらわす．（($N(x)$ は原始帰納的)．

（ii）　N の論理式 $\mathrm{A}(\mathrm{a}_1,\ldots,\mathrm{a}_n)$ のゲーデル数を z，自由変数 $\mathrm{a}_1,\ldots,\mathrm{a}_n$ のゲーデル数を $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ とするとき $\mathrm{A}(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n)$ のゲーデル数を

$$Sb(z)\begin{pmatrix}\alpha_1, & \ldots, & \alpha_n,\\ N(x_1), & \ldots, & N(x_n)\end{pmatrix}$$

であらわす．これは $z,\alpha_1,\ldots,\alpha_n,x_1,\ldots,x_n$ の原始帰納関数である．

（iii）　$Prf[\mathrm{N}_0](x,y)\Longleftrightarrow x$ はある論理式のゲーデル数であり，y はその論理式に至る N_0 の証明図のゲーデル数である．

$Prf[\mathrm{N}_0](x,y)$ は原始帰納的述語である．

（iv）　$Pr[\mathrm{N}_0](x)\Longleftrightarrow(Ey)Prf[\mathrm{N}_0](x,y)$

$\Longleftrightarrow x$ は N_0 で証明可能な論理式のゲーデル数である

これは原始帰納的でない．

（2）$T_n(z,x_1,\ldots,x_n,y)$ と $U(y)$ の定義

$$T_n(z,x_1,\ldots,x_n,y)$$
$$\Longleftrightarrow Prf[\mathrm{N}_0]\left(Sb(z)\begin{pmatrix}\alpha_1, & \ldots, & \alpha_n, & \alpha_{n+1},\\ N(x_1), & \ldots, & N(x_n), & N((y)_0)\end{pmatrix},(y)_1\right)$$
$$U(y)=(y)_0$$

によって T_n と U を定義する．$(y)_0$，$(y)_1$ は素因数分解にでてくるベキ指数 $(y)_i$ の部分であって $y=2^{(y)_0}\cdot 3^{(y)_1}$ をみたすものである．これらは原始帰納関数である．

φ は G-算定可能関数である

$$\Longleftrightarrow\left[\begin{array}{c}N\text{ の論理式 }\mathrm{P}(\mathrm{a}_1,\ldots,\mathrm{a}_n,\mathrm{b})\text{ があって}\\ \varphi(x_1,\ldots,x_n)=y\Longleftrightarrow \mathrm{N}_0\vdash\mathrm{P}(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n,\bar{y})\end{array}\right]$$

だから述語に対しては表現関数を考えることにより

$$R(x_1, \ldots, x_n) \text{ は G-決定可能述語である}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} N \text{ の論理式 } \mathrm{R}(\mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_n) \text{ が存在して} \\ R(x_1, \ldots, x_n) = y \Longleftrightarrow \mathrm{N}_0 \vdash \mathrm{R}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) \end{bmatrix}$$

が成立つ.

（3） **枚挙定理の証明**

$R(x_1, \ldots, x_n, y)$ を G-決定可能述語とすると N の論理式 $\mathrm{R}(\mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_n, \mathrm{a}_{n+1})$ があって

$$\mathrm{R}(x_1, \ldots, x_n, y)$$

$$\Longleftrightarrow \mathrm{N}_0 \vdash \mathrm{R}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n, \bar{y})$$

$\mathrm{R}(\mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_n, \mathrm{a}_{n+1})$ のゲーデル数を e とすると,

$$\Longleftrightarrow (Ew) Prf[\mathrm{N}_0]\left(Sb(e)\begin{pmatrix} \alpha_1, & \ldots, & \alpha_n, & \alpha_{n+1} \\ N(x_1), & \ldots, & N(x_n), & N(y) \end{pmatrix}, w\right)$$

ゆえに

$$(Ey) R(x_1, \ldots, x_n, y)$$

$$\Longleftrightarrow (Ey)\,(Ew) Prf[\mathrm{N}_0]\left(Sb(e)\begin{pmatrix} \alpha_1, & \ldots, & \alpha_n, & \alpha_{n+1} \\ N(x_1), & \ldots, & N(x_n), & N(y) \end{pmatrix}, w\right)$$

$$((Ey)\,(Ew)\,Q(y, w) \Longleftrightarrow (Ey)\,Q((y)_0, (y)_1) \text{ を用いて})$$

$$\Longleftrightarrow (Ey) Prf[\mathrm{N}_0]\left(Sb(e)\begin{pmatrix} \alpha_1, & \ldots, & \alpha_n, & \alpha_{\mathrm{n}+1} \\ N(x_1), & \ldots, & N(x_n), & N((y)_0) \end{pmatrix}, (y)_1\right)$$

$$\Longleftrightarrow (Ey)\, T_n(e, x_1, \ldots, x_n, y)$$

これは枚挙定理である.

（4） **標準形定理の証明**

G-算定可能関数 $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ に対しては N の論理式 $\mathrm{P}(\mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_n, \mathrm{a}_{n+1})$ があ

って

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = y \Longleftrightarrow \mathrm{N}_0 \vdash \mathrm{P}(x_1, \ldots, \bar{x}_n, \bar{y})$$

となるのであった．$\mathrm{P}(\mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_n, \mathrm{a}_{n+1})$のゲーデル数を e とすれば，任意の $x_1, \ldots, x_n$ に対し上式の右辺の $\bar{y}$ と証明図（のゲーデル数）w が存在することを書き下して

$$(x_1)\cdots(x_n)(Ey)(Ew)Prf[N_0]\left(Sb(e)\begin{pmatrix}\alpha_1, & \ldots, & \alpha_n, & \alpha_{n+1}\\ N(x_1), & \ldots, & N(x_n), & N(y)\end{pmatrix}, w\right)$$

となるがこれは

$$(x_1)\cdots(x_n)(Ey)Prf[\mathrm{N}_0]\left(Sb(e)\begin{pmatrix}\alpha_1, & \ldots, & \alpha_n, & \alpha_{n+1}\\ N(x_1), & \ldots, & N(x_n), & N((y)_0)\end{pmatrix}, (y)_1\right)$$

すなわち

$$(x_1)\cdots(x_n)(Ey)T_n(e, x_1, \ldots, x_n, y)$$

が成り立つ．$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = w$ ならば，y は上式の成立つような最小の y に対する $(y)_0$ だから

$$y = \left(\mu y Prf[\mathrm{N}_0]\left(Sb(e)\begin{pmatrix}\alpha_1, & \ldots, & \alpha_n, & \alpha_{n+1}\\ N(x_1), & \ldots, & N(x_n), & N((y)_0)\end{pmatrix}, (y)_1\right)\right)_0$$

$$= U(\mu y T_n(e, x_1, \ldots, x_n, y))$$　（標準形定理である）

K-一般帰納関数，T-計算可能関数に対しても T_n，Uをうまく定義して（上の T_n や Uとはまるきり異なるが）定理が成り立つことを証明することができる．

7°　定理からのいくつかの帰結

系 1　任意の一般帰納的述語 $R(x_1, \ldots, x_n, y)$ に対し，

（1）　$(Ey)R(x_1, \ldots, x_n, y) \Longleftrightarrow (Ey)S(x_1, \ldots, x_n, y)$

（2）　$(y)R(x_1, \ldots, x_n, y) \Longleftrightarrow (y)S'(x_1, \ldots, x_n, y)$

をみたす原始帰納的述語 $S(x_1, \ldots, x_n, y)$，$S'(x_1, \ldots, x_n, y)$ が存在する．

［証明］ S，S' として枚挙定理の $T_n(e, x_1, \ldots, x_n, y)$，$\bar{T}_n(f, x_1, \ldots, x_n, y)$ をとればよい．

系 2　一般帰納的述語 $P(x_1, \ldots, x_n)$ はある原始帰納的述語 R，S によって

$$(Ey)\,R(x_1, \ldots, x_n, y)$$

の形にも

$$(y)\,S(x_1, \ldots, x_n, y)$$

の形にもあらわせる．逆も成り立つ．

［証明］ 最初の部分は

$$\begin{aligned} P(x_1, \ldots, x_n) &\Longleftrightarrow (Ey)\,(P(x_1, \ldots, x_n)\ \&\ y=y) \\ &\Longleftrightarrow (y)\,(P(x_1, \ldots, x_n)\ \&\ y=y) \end{aligned}$$

よりあきらか．

逆の方．

$$\begin{aligned} P(x_1, \ldots, x_n) &\Longleftrightarrow (Ey)\,R(x_1, \ldots, x_n, y) \\ &\Longleftrightarrow (y)\,S(x_1, \ldots, x_n, y) \quad (R,\ S \text{ は原始帰納的とする}) \end{aligned}$$

これから $\bar{P}(x_1, \ldots, x_n) \Longleftrightarrow (Ey)\,\bar{S}(x_1, \ldots, x_n, y)$．

排中律 $P(x_1, \ldots, x_n) \vee \bar{P}(x_1, \ldots, x_n)$ はつねに成り立つから

$$(Ey)\,R(x_1, \ldots, x_n, y) \vee (Ey)\,\bar{S}(x_1, \ldots, x_n, y)$$

が成り立つ．これは

$$(Ey)\,(R(x_1, \ldots, x_n, y) \vee \bar{S}(x_1, \ldots, x_n, y))$$

と同値である．任意の $x_1, \ldots, x_n$ に対して成り立つから

$$\mu y(R(x_1, \ldots, x_n, y) \vee \bar{S}(x_1, \ldots, x_n, y))$$

は一般帰納関数である．そして

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \mu y(R(x_1, \ldots, x_n, y) \vee \bar{S}(x_1, \ldots, x_n, y))$$

とするとき

$$R(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n)) \vee \bar{S}(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n))$$

であるが，あきらかに

$$P(x_1, \ldots, x_n) \Longleftrightarrow R(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n))$$

である．右辺が一般帰納的であるから $P(x_1, \ldots, x_n)$ も一般帰納的である．

8° 帰納的に可算な述語 (recursively enumerable predicate)

$R(x, y)$ を一般帰納的述語とするとき $(Ey)R(x, y)$ の形の述語を帰納的(に)可算(な)述語といい，集合 $\{x|(Ey)R(x, y)\}$ のことを帰納的に可算な集合という．

名前の由来は次の通りである．

一般帰納関数の値域は帰納的可算集合であり，逆に空でない帰納的可算集合はある一般帰納関数の値域である．

実際，$f(x)$ を一般帰納関数とするときその値域は $\{x|(Ey)(f(y)=x)\}$ であるから帰納的に可算である．

逆に $S=\{x|(Ey)R(x, y)\}$ を空でない帰納的可算集合とするとき，$a \in S$ を一つとり，任意の x に対して

$$f(x) = \begin{cases} (x)_0 & R((x)_0, (x)_1) \text{のとき} \\ a & \bar{R}((x)_0, (x)_1) \text{のとき} \end{cases}$$

とおけば $f(x)$ は一般帰納的である（場合分けによる原始帰納関数の定義と同じ）．あきらかに f の値域は S である．

ところで系 1 によって上の R は原始帰納的述語にとれ，上の f も原始帰納関数にとれる．

系1′ 空でない帰納的に可算な集合は，ある原始帰納関数の値域である．

ある一般帰納的述語 $P(x)$ によって $\{x|P(x)\}$ と表される集合のことを帰納的集

合という．そのとき

系2′ Sは帰納的集合である$\Longleftrightarrow S$も補集合 S^c も帰納的可算集合である．

［証明］ $S^c=\{x|\,(Ey)R(x,y)\}$ なら $S=\{x|\,(y)\bar{R}(x,y)\}$ であることと系 2 より出る．

系 3 $(Ey)\,T_1(x,x,y)$ は $(y)R(x,y)$ （R は一般帰納的）の形に表わせない．

［証明］ $(Ey)\,T_1(x,x,y)\Longleftrightarrow(y)R(x,y)$——$R$ は一般帰納的——とする．枚挙定理の(2)によって $(y)R(x,y)\Longleftrightarrow(y)\,\bar{T}_1(f,x,y)$ となる f がある．任意の x に対し

$$(Ey)\,T_1(x,x,y)\Longleftrightarrow(y)R(x,y)\Longleftrightarrow(y)\,\bar{T}_1(f,x,y)\Longleftrightarrow\overline{(Ey)}\,T_1(f,x,y).$$

x に f を代入すれば $(Ey)\,T_1(f,f,y)\Longleftrightarrow\overline{(Ey)}\,T_1(f,f,y)$ となって矛盾する．

同様にして $(y)\,\bar{T}_1(x,x,y)\Longleftrightarrow(Ey)R(x,y)$ となる一般帰納的述語が存在しないこともいえる．

系 4 一般帰納的でない述語，関数が存在する．

たとえば $(Ey)\,T_1(x,x,y)$ や $(y)\,\bar{T}_1(x,x,y)$ がそれである．これが帰納的なら系 2 によってそれぞれ $(y)R(x,y)$，$(Ey)R(x,y)$ の形であらわせるはずだから．

$(Ey)\,T_1(x,x,y)$ は帰納的可算述語だから，

系 4′ 一般帰納的でない帰納的可算述語が存在する．

9° 階層定理

これはあとで用いないので述べない．

一般帰納関数と述語に対しても各数ごとの表現定理が成立つ．

$$\begin{aligned}&\mu yR(x_1,\ldots,x_n,y)=w\\&\qquad\Longleftrightarrow R(x_1,\ldots,x_n,w)\ \&\ (z)\,(z<w\Longrightarrow\bar{R}(x_1,\ldots,x_n,z))\end{aligned}$$

などにもとづく．（入門数学基礎論Ⅲ章参照）

10° 不完全性定理再論

チャーチの提唱，一般帰納関数を学んだことによって不完全性定理をより深めることができる．たとえば決定不可能述語（チャーチの提唱のもとでは一般帰納的でない述語）の存在と，不完全性との関係に関することである．

（1）まず不完全性定理の成立つ条件を

「⟨L, T⟩ は実質的に N_0 を含む ω-無矛盾な一般帰納的公理系である」

に一般化することができることに注意しよう．一般帰納的公理系とは Ax[T](*x*) が一般帰納的であるということであり，これはＬ上の論理式がＴに属するか否かが決定可能であるということであって当然の要請だといえる．このときは *Prf*[T](*x*, *y*) が一般帰納的となり，したがって各数ごとの表現定理が成立つから不完全性定理の証明がそのまま成立つ．

（2）$\vdash \varphi$ in H が決定不可能であることは N_0 の極大無矛盾拡大を作ることを通じて不完全性定理を用いて証明された．すなわち，

不完全性定理 $\Longrightarrow$ 決定不可能述語の存在

を証明したわけである．背景にチャーチの提唱があること（決定可能な T′ は一般帰納的である）および(1)で注意した不完全性定理の成立つ条件を利用していることに注意しよう．

さて，

(2)-(i) 帰納的でない帰納的可算述語の存在から $Pr[N_0](x)$ の非決定性がでること．

補題(弱 ω-無矛盾性) $R(x, y)$ は原始帰納的述語，R(a, b) はそれを各数ごとに表現するＮの論理式とするとき，

$$(Ey)R(x,y) \Longleftrightarrow \mathrm{N}_0 \vdash \exists \mathrm{y}\,\mathrm{R}(\bar{x},\mathrm{y}).$$

［証明］ ⇒は表現定理と∃-導入から出る．⇐はHの健全性定理から$\boldsymbol{N} \models \exists \mathrm{y}\,\mathrm{R}(\bar{x},\mathrm{y})$であることからわかる． □

$(Ey)R(x,y)$ を一般帰納的でない帰納的に可算な述語たとえば $(Ey)\,T_1(x,x,y)$ としよう．$\mathrm{R}(\mathrm{a},\mathrm{b})$ を $R(x,y)$ を表現するNの論理式とし，$\exists \mathrm{y}\,\mathrm{R}(\bar{x},\mathrm{y})$ のゲーデル数を $r(x)$ とする．$r(x)$ は原始帰納的である．補題より

$$(Ey)R(x,y) \Longleftrightarrow \mathrm{N}_0 \vdash \exists \mathrm{y}\,\mathrm{R}(\bar{x},\mathrm{y}) \Longleftrightarrow Pr[\mathrm{N}_0](r(x))$$

$Pr[\mathrm{N}_0](x)$ が一般帰納的なら $Pr[\mathrm{N}_0](r(x))$ もそうであり，$(Ey)R(x,y)$ が一般帰納的となって矛盾する．すなわち $Pr[\mathrm{N}_0](x)$ は一般帰納的でなく，したがって決定不可能である．

$$\mathrm{N}_0 \vdash \varphi \Longleftrightarrow \vdash \widetilde{\mathrm{N}}_0 \to \phi \text{ in H} \Longleftrightarrow Pr[\mathrm{N}_0](\ulcorner \varphi \urcorner)$$

だから$\vdash \varphi$ in Hが決定可能でないことの別証明がえられたことになる．なお$\langle \mathrm{L}, \mathrm{T} \rangle$が(1)の条件をみたすならば

$$(Ey)R(x,y) \Longleftrightarrow \mathrm{T} \vdash \exists \mathrm{y}\,\mathrm{R}(\bar{x},y)$$

が成立つ．⇒は表現定理と∃導入である．⇐は右辺が成立つのに左辺が成立たないとすれば $(y)\bar{R}(x,y)$．表現定理より $(y)(\mathrm{T} \vdash \neg R(\bar{x},\bar{y}))$ となって T は ω-矛盾することになる．あとは上と同様なやり方で $Pr[\mathrm{T}](x)$ は一般帰納的でないことがいえる．

(2)-(ii) 決定不可能述語の存在$\Longrightarrow \mathrm{N}_0$ は不完全

ほとんど自明のことだが念を入れて次の補題を確認しておこう．

補題 $R(x_1,\ldots,x_n)$ が N_0 において各数ごとに表現可能であるとする．すなわちNの論理式 $\mathrm{R}(\mathrm{a}_1,\ldots,\mathrm{a}_n)$ があって

$$R(x_1,\ldots,x_n) \Longrightarrow \mathrm{N}_0 \vdash \mathrm{R}(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n)$$

$$\bar{R}(x_1,\ldots,x_n) \Longrightarrow \mathrm{N}_0 \vdash \neg R(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n)$$

とする．そのとき $R(x_1, \ldots, x_n)$ は一般帰納的述語である．

［証明］論理式 P を次のように定義する．

$$\mathrm{P}(\mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_n, \mathrm{b}) := (\mathrm{R}(\mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_n) \wedge \mathrm{b} = 0) \vee (\neg R(\mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_n) \wedge \mathrm{b} = \bar{1})$$

$R(x_1, \ldots, x_n)$ の表現関数 $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ に対し

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{N}_0 \vdash \mathrm{P}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n, 0)$$

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = 1 \Longleftrightarrow \mathrm{N}_0 \vdash \mathrm{P}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n, \bar{1})$$

だから $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ は G-算定可能関数となる．したがって一般帰納的である．表現関数が一般帰納的だから $R(x_1, \ldots, x_n)$ は一般帰納的である．　□

$(Ey)R(x, y)$ ($Q(x)$ と書く）は帰納的でない帰納的可算述語とする．R(a, b) は $R(x, y)$ を表現する N の論理式とし Q(a) を ∃yR(a, y) とする．N_0 の ω-無矛盾性より

$$Q(x) \Longleftrightarrow \mathrm{N}_0 \vdash \mathrm{Q}(\bar{x}) \qquad (*)$$

一方，$\bar{Q}(x) \Longrightarrow \mathrm{N}_0 \vdash \neg \mathrm{Q}(\bar{x})$ ではない．もしこれが成立つなら上の補題から $Q(x)$ は一般帰納的となるからである．したがって $\bar{Q}(q)$ であるが $\mathrm{N}_0 \vdash \neg \mathrm{Q}(\bar{q})$ ではないような q がある．

一方 $\mathrm{N}_0 \vdash \mathrm{Q}(\bar{q})$ でもない．このときは（∗）より $Q(q)$ となって $\bar{Q}(q)$ であることに反するからである．したがって $\mathrm{N}_0 \vdash \mathrm{Q}(\bar{q})$ でも $\mathrm{N}_0 \vdash \neg \mathrm{Q}(\bar{q})$ でもない．ゆえに N_0 は不完全である．

上の証明は N_0 の代りに(1)をみたす T をとっても通用する．

$$R(x_1, \ldots, x_n) \Longrightarrow \mathrm{T} \vdash \mathrm{R}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$$

$$\bar{R}(x_1, \ldots, x_n) \Longrightarrow \mathrm{T} \vdash \neg \mathrm{R}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$$

なら $R(x_1, \ldots, x_n)$ は一般帰納的であることがいえる．T の無矛盾性から ⟺ が成立つこと．$R(x_1, \ldots, x_n)$ は $(Ey)S(x_1, \ldots, x_n, y)$ の形にも $(y)S'(x_1, \ldots, x_n, y)$ の

形にも表わせることがわかる．（*）がTについて成立つことは ω-無矛盾性からいえることはすでに述べた．したがって同じ論法でTの不完全性がいえる．すなわち一般帰納的でない述語（非決定述語）の存在と不完全性定理は同じ深さにあることがわかった．

X　公理論的集合論

1° ZF（ツェルメロ-フレンケル集合論）と ZFC

先にあげたツェルメロの公理系 Z において分出公理は弱すぎるとして置換公理 (Axiom of Replacement) をおくべきだとしたのはフレンケル (Fraenkel) であった (1922).

正則性公理 (Axiom of Regularity)——または基礎の公理 (Axiom of Foundation) とも呼ばれる——はフォンノイマン (Von Neumann) によって導入された (1925).

置換公理　論理式 $A(a, b)$ に対して

$$\forall x \forall y_1 \forall y_2 (A(x, y_1) \land A(x, y_2) \to y_1 = y_2) \longrightarrow \forall u \exists v \forall r (r \in v \leftrightarrow \exists s (s \in u \land A(s, r)))$$

説明. $\{\langle x, y \rangle | A(x, y)\}$ がある関数 $y = F(x)$ を定義するならば（定義域はクラス $D = \{x | \exists y A(x, y)\}$），任意の集合 u に対する F の値域 $F[u]$（または $F``u = \{r | (\exists s \in u \land \mathrm{A}(s, r)\}$）はある集合であることを主張する．この公理は次の収集原理 (Collection Principle) と同値である.

$$\forall x \exists y [(\forall u \in x)(\exists v A(u, v) \to (\exists v \in y A(u, v))]$$

正則性公理

Reg　　$\forall x (x \neq \emptyset \longrightarrow \exists y (y \in x \land x \cap y = \emptyset))$

Reg′　　$\exists x A(x) \longrightarrow \exists y (A(y) \land \forall z (A(z) \to z \notin y))$

Reg′ は Reg をクラスに拡張したもので一見して Reg′ の方が強いようだが実は Reg と Reg′ は同値である．クラス $A = \{x | A(x)\}$ に対して $\in$ に関する極小元 y が存在することを主張する.

Z の公理（外延性公理，等号公理，空集合の公理，ペアの公理，合併集合の公理べ

キ集合の公理，分出公理）に置換公理と正則性公理を加えたものをツェルメロフレンケル集合論といい ZF であらわす．ZF に選択公理を加えたものを ZFC と書く．

2° ZF と BG

「入門」では§1で ZF，ZFC を説明し，§2で BG（ベルナイス-ゲーデルの集合論）を扱っているが BG は §3 以降に絶対必要というわけではない．

補助的に論理式 $A(a)$ に対するクラス $A=\{x|A(x)\}$ を考えてよいとし，——かならずしも集合にはならないことに留意しつつ——$A\cup B$, $A\cap B$, $-A=\{x|x\notin A\}$, $\bigcup A$, $\bigcap A$, $A\times B$ などが定義されるとしておけばよい．

BG はクラスの概念をもとにした集合論の公理系であり，上のような扱いをそれによって合理化するものにすぎない．

$\mathrm{Fnc}(F)$（F は関数である），$\mathrm{D}(F)$（F の定義域）等も定義される．宇宙（すべての集合のクラス $\{x|x=x\}$）を V であらわす．

3° 順序数

（1）半順序集合と整列集合

X を集合，$<$ を X 上の関係とする．次の性質（i），（ii）が成立つとき，$(X,<)$ は半順序集合という．

（i） 任意の $x\in X$ に対し，$\neg$ $(\mathrm{x}<\mathrm{x})$,

（ii） $x,y,z\in X$ に対して，$x<y\wedge y<z\rightarrow x<z$.

もし

（iii） 任意の $x,y\in X$ に対し $(x<y)\vee(x=y)\vee(y<x)$ が成立つとき線形順序という．

$(W,<)$ が整列集合とは半順序集合であって W の任意の空でない部分集合が最小元をもつものをいう．（整列集合は線形順序集合である）．すなわち $X\subseteq W$, $X\neq\emptyset$ なら $x\in X$ があって $(\forall y\in X)(x\leq y)$．ここに $x\leq y\leftrightarrow(x=y\vee x<y)$．

（2）**順序同型**

X, Y を半順序集合とし，写像 $f: X \to Y$ が

$$x < y \longleftrightarrow f(x) < f(y)$$

をみたすならば f は順序保存写像という．

$f: X \to Y$ が双射であり，かつ順序を保存するならば f は順序同型写像という．順序同型写像が存在するとき X と Y は順序同型であるという．整列集合の自分自身への同型写像は恒等写像のみである．

整列集合 W と $u \in W$ に対し，$W(u) = \{x \in W | x < u\}$ のことを W の（u による）切片（initial segment）という．

（3）**定理（整列集合の比較可能定理）**

W_1, W_2 を整列集合とするとき次の３つのうち１つだけが成立つ．

（a）　W_1 は W_2 と順序同型

（b）　W_1 は W_2 のある切片に順序同型

（c）　W_2 は W_1 のある切片に順序同型

証明は多くの本にある．（「入門」にもブルバキにもある）ので省略する．

（4）**順序数の定義** a は推移的である（$\mathrm{Trans}(a)$）を

$$\mathrm{Trans}(a) \longleftrightarrow (\forall x \in a)(x \subseteq a)$$

によって定義する．

$$\mathrm{Ord}(a)\ (a \text{ は順序数である}) \longleftrightarrow \text{(i)}\ \mathrm{Trans}(a) \text{ かつ}$$

$$\text{(ii)}\ a \text{ は } \in \text{ に関して整列集合である}$$

によって定義する．（$\mathrm{On}(a)$ と書く場合もある）．

a は $\in$ に関して整列集合である $\longleftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l}(\forall x \in a)(\neg(x \in x)) \wedge (\forall x \in a)(\forall y \in a)(\forall z \in a)(x \in y \wedge y \in z \to x \in z) \\ \qquad (a \text{ は } \in \text{ に関して半順序集合である}) \\ \wedge\ \forall x(x \subseteq a \wedge x \neq \emptyset \to \exists y(y \in x \wedge \forall z(z \in x \to z = y \vee y \in z)))\end{array}\right]$$

だから Ord(a) は ZF の論理式であらわされる.

4° 順序数の性質

順序数を α, β, γ 等であらわす.

(1)(0) 空集合 $\emptyset=0$ は順序数である. これを 0 であらわす.

(i) α が順序数, $x\in\alpha$ ならば x は順序数である.

(ii) α の切片は順序数である.

(iii) 順序数 α は α より小さい順序数全体の集合である. $\alpha=\{\beta|\beta<\alpha\}$

[証明](0) $\emptyset$ が順序数であることを書き下してみると前提が偽になってつねに真となる.

(i) $x\in\alpha$ のとき x が推移的であること. ($y\in x\wedge z\in y\rightarrow z\in x$ のこと). α は推移的だから $y, z\in\alpha$, 上式は α に対する半順序の公理(ii)から出る. したがって $x\subseteq\alpha$, ゆえに x は$\in$に関して半順序集合であり α が整列集合だから x も整列集合. ゆえに x は順序数である.

(ii) α の切片はある $x\in\alpha$ による $\{y|y\in x\}$ であるがこれは x 自体であるから x は順序数である.

(iii) $\alpha=\{x|x\in\alpha\}$ だから α は α より小さい順序数の全体である.

(2) **比較可能性**

(i) α, β は順序数, $\alpha\subsetneq\beta\Longrightarrow\alpha\in\beta$.

(ii) α, β が順序数なら, $\alpha\subseteq\beta$ か $\beta\subseteq\alpha$.

(iii) 任意の順序数 α, β に対し $\alpha\in\beta\vee\alpha=\beta\vee\beta\in\alpha$.

[証明](i) γ を $\beta-\alpha$ の最小元とする. このとき $\delta\in\alpha\rightarrow\delta\in\gamma$. なぜなら, $\delta\notin\gamma$ なら $\delta=\gamma$ か $\gamma\in\delta$. いづれの場合も $\gamma\in\alpha$ となって $\gamma\in\beta-\alpha$ に矛盾する.

$\delta\in\gamma\rightarrow\delta\in\alpha$. なぜなら, $\delta\in\gamma$ だが $\delta\notin\alpha$ ならば $\delta\in\beta-\alpha$ で γ の最小性に反する.

以上より $\alpha=\{\delta\in\beta|\delta\in\gamma\}=\gamma$ だから $\alpha\in\beta$.

（ii）　$\gamma=\alpha\cap\beta$ とすれば $\gamma=\alpha$ あるいは $\gamma=\beta$．このときは $\alpha\subseteq\beta$ あるいは $\beta\subseteq\alpha$．なぜなら $\gamma\neq\alpha$ かつ $\gamma\neq\beta$ ならば（i）より，$\gamma\in\alpha$ かつ $\gamma\in\beta$ となり，したがって $\gamma\in\alpha\cap\beta=\gamma$ となる．これは半順序の条件 $\gamma\notin\gamma$ に反する．

（iii）　任意の α，β に対し（ii）より $\alpha\subseteq\beta$ か $\beta\subseteq\alpha$ である．$\alpha\subseteq\beta$ のとき $\alpha=\beta$ か $\alpha\subsetneq\beta$（このときは（i）より $\alpha\in\beta$）$\beta\subseteq\alpha$ のときは $\beta=\alpha$ か $\beta\subsetneq\alpha$（このときは（i）によって $\beta\in\alpha$）いずれにせよ $\alpha=\beta\vee\alpha\in\beta\vee\beta\in\alpha$．

（3）**後続者（Successor）第1種，第2種の区別**

$a+1=a\cup\{a\}$ によって $a+1$ を定義する．順序数 α に対し $\alpha+1$ を α の後続者という．α が順序数なら $\alpha+1$ も順序数であり，$\alpha<\alpha+1$ である．また

$$\neg\exists\beta(\alpha<\beta<\alpha+1).$$

順序数は 0 または $\beta+1$ の形のとき（つまり後続者のとき）第1種，そうでないとき第2種または極限数という．「α が第1種である」，「第2種である」を $\mathrm{K_I}(\alpha)$，$\mathrm{K_{II}}(\alpha)$ と書く．

（4）**自然数の定義**

0 および次の性質をもつ順序数 α を自然数という．

$$\forall\beta(\beta\leq\alpha\rightarrow\mathrm{K_I}(\beta)).$$

$\emptyset$，$\{\emptyset\}$，$\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$，$\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}$，$\cdots$はこの性質をもつ．これを $0,1,2,3\cdots$ と書く．一般に自然数 n まで定義されたとき $n+1=n\cup\{n\}=\{0,1,2,\cdots,n\}$ とする．

（5）**空でない順序数のクラスにおける最小元の存在**

S が順序数のクラスで空でないとすると S に最小の順序数が存在する．

［証明］$\beta\in S$ のとき，$(\beta+1)\cap S$ は順序数 $\beta+1$ の部分集合であり，β を元としてもつから空ではない．したがって最小元 α_0 が存在する．この α_0 が求めるものである．

$\alpha_0\in(\beta+1)\cap S$ だからもちろん $\alpha_0\in S$．

任意の $\alpha \in S$ をとる．$\alpha \in \beta+1$ ならば定義により $\alpha_0 \leq \alpha$，$\alpha \notin \beta+1$ ならば $\alpha \geq \beta+1 \geq \alpha_0$ だからやはり $\alpha_0 \leq \alpha$ である．

ZF の論理式 $A(a)$ からクラス $A=\{\alpha | A(\alpha)\}=\{x | A(x) \wedge \mathrm{Ord}(x)\}$ を作れば A が空でなければ最小元をもつが，これを $\mu\alpha A(\alpha)$ と書く．

（6） **上限の存在**

S を順序数の集合とするとき $\forall\beta(\beta\in S \rightarrow \beta \leq \alpha)$ となるような α（すなわち S の上界）の最小元，すなわち S の上限 $\sup S$ が存在する．

［証明］S の合併 $\gamma=\bigcup S$ をとる．

任意の $x, y \in \gamma$ に対して $x \in \alpha$，$y \in \beta$ となる S の元 α，β がある．

（2）の（ii）によって $\alpha \subseteq \beta$ か $\beta \subseteq \alpha$ である．$\alpha \subseteq \beta$ ならば $x, y \in \beta$ だから x，y は比較可能である．$\beta \subseteq \alpha$ の場合も同様である．すなわち γ は線形順序集合である．

γ は推移的である．$x \in \gamma$，$y \in x$ とする．x はある $\alpha \in S$ に対して $x \in \alpha$ である．$y \in x$ なら α の推移性から $y \in \alpha$ となる．すなわち $y \in \gamma$ である．ゆえに γ は推移的である．

γ は整列集合である．$T \subseteq \gamma$ で T が空でないとする．$x \in T$ ならばある $\alpha \in S$ があって $x \in \alpha$ だから，$\alpha \cap T \neq \emptyset$．$\alpha \cap T$ は α の空でない部分集合だから最小元 α_0 をもつ．これは T の最小元である．$\beta \in T$ とする．$\beta \in \alpha$ ならば定義によって $\alpha_0 \leq \beta$．$\beta \notin \alpha$ なら $\alpha \leq \beta$ だから $\alpha_0 < \alpha \leq \beta$．

以上によって γ は順序数である．

S に最大元 α があれば $\gamma=\alpha$．このときは $\gamma=\sup S$．

S に最大元がなければ任意の $\alpha \in S$ に対して $\alpha \subsetneq \gamma$，（2）の（i）によって $\alpha < \gamma$．ゆえに γ は S の上界である．β を S の上界とする．すなわちすべての $\alpha \in S$ に対して $\alpha \leq \beta$（すなわち$\alpha \subseteq \beta$）とする．このときは$\bigcup S=\gamma \subseteq \beta$，したがって $\gamma \leq \beta$．すなわち γ は上界の最小元である．ゆえに $\gamma=\sup S$．

これで証明は終わったが，ついでに付言すれば S に最大限がない場合 γ は極限数となる．なぜなら $\gamma=\gamma_0+1$ とすれば，すべての $\alpha \in S$ に対して $\alpha \leq \gamma_0$ となるこ

とはない．(このときは γ_0 は γ より小さい上界となる)．したがってある $\alpha \in S$ に対して $\alpha > \gamma_0$ となる．このときは $\gamma \geq \alpha \geq \gamma_0 + 1 = \gamma$ より $\alpha = \gamma$，すなわち α は S の最大元になる．

（7） **自然数全体の集合 ω の存在**

極限数は存在する．無限公理は $\emptyset \in x \wedge \forall y(y \in x \rightarrow y \cup \{y\} \in x)$ となるような集合 x の存在を主張する．x に属するすべての順序数の集合を S とすれば S は最大元をもたない．$\alpha \in S$ $(\alpha \in x)$ ならば $\alpha + 1 \in S$ $(\alpha + 1 \in x)$ だからである．(6)の最後にふれたようにこのときは $\sup S$ は極限数である．ゆえに極限数は存在する．

α を一つの極限数とし，これをこえない最小の極限数（(5)によってこれは存在する）を ω とする．このとき．

$$n \text{ は自然数} \longleftrightarrow n \in \omega$$

が成立つ．

実際 $0 \in \omega$ である．n を 0 でない自然数とすれば $n \in \omega \vee n = \omega \vee \omega \in n$ であるが，n は第 1 種だから $n = \omega$ ではありえない．また(4)によって，n および n の元はすべて第 1 種だから $\omega \in n$ でもない．ゆえに $n \in \omega$ である．逆に $y \in \omega$ ならば，ω は最小の極限数だったから，$z \leq y$ ならば z は 0 か第 1 種であり，したがって y は自然数である．

数学的帰納法．$x \subseteq \omega$，$0 \in x$，すべての自然数 n に対し $n \in x \rightarrow n+1 \in x$ が成立つならば，$x = \omega$ である．

実際，$x \subsetneq \omega$ とし，$\omega - x$ の最小の自然数を m とすれば，$m \neq 0$ だから $n+1 = m$ となる自然数 n がある．$n < m$ だから $n \notin \omega - x$，つまり $n \in x$，仮定によって $m = n+1 \in x$ となって矛盾する．

$A(a)$ を ZF の論理式，n を ω を動く変数とするとき

$$A(0) \wedge \forall n(A(n) \rightarrow A(n+1)) \rightarrow \forall n A(n)\,.$$

$x = \{n | A(n)\}$ に上のことを適用すればよい．

（8）**超限帰納法（Transfinite Induction)**

$A(a)$ を ZF の論理式，α，ξ は順序数を動く変数とするとき，

$$\forall\alpha[(\forall\xi<\alpha)A(\xi)\to A(\alpha)]\to\forall\alpha A(\alpha)$$

実際，$\forall\alpha[(\forall\xi<\alpha)A(\xi)\to A(\alpha)]$であるが，$\forall\alpha A(\alpha)$でないと仮定して，$\neg A(\beta)$ をみたす最小の β をとる．そのとき $(\forall\xi<\beta)A(\xi)$ だから，仮定によって $A(\beta)$ が成立つことになって矛盾する．

（9）順序数の全体 $\mathrm{On}=\{x|\mathrm{Ord}(x)\}$ は集合ではない

なぜなら On は(2)の(iii)によって線形順序であり，(5)によって空でない部分クラスに最小元があり，推移性 ($\alpha\in\mathrm{On}\wedge\beta\in\alpha\to\beta\in\mathrm{On}$) もあきらかだから，もし On が集合ならそれは順序数であり，$\mathrm{On}\in\mathrm{On}$ となる．$\mathrm{On}+1\in\mathrm{On}$，$\mathrm{On}+1<\mathrm{On}$ となって矛盾する．(ブラリ・フォルティパラドクスに関係する)．

5° 超限帰納法による On 上の関数の定義

G は V 上いたるところで定義された関数とする．すなわち $\mathrm{Fnc}(G)$，$\mathrm{D}(G)=V$．

このとき

$$\text{すべての } \alpha\in\mathrm{On} \text{ に対し } F(\alpha)=G(F\upharpoonright\alpha)$$

をみたす On 上の関数 F がただ１つ存在する．($F\upharpoonright\alpha$ は F を α 上に制限した関数のことである)．

［証明］ $(\forall\xi<\alpha)f(\xi)=G(f\upharpoonright\xi)$ をみたす関数を α–近似と呼ぶことにする．このとき

> f が α–近似，f' が α'–近似ならば，$f\upharpoonright\alpha\cap\alpha'=f'\upharpoonright\alpha\cap\alpha'$．すなわち $\xi<\alpha$，α' ならば $f(\xi)=f'(\xi)$．

ξ に関する超限帰納法で証明する．

$$(\forall\eta<\xi)(f(\eta)=f'(\eta)) \text{ ならば } f(\xi)=G(f\upharpoonright\xi)=G(f'\upharpoonright\xi)=f'(\xi)$$

次に α に関する帰納法によって α–近似がつねに存在することを示す．α–近似を f_α と書く．

α が極限数のとき $\xi<\alpha$ に対し $\xi<\beta<\alpha$ なる β をえらぶ．f_β は定義されているとする．$f_\alpha(\xi)=f_\beta(\xi)$ とおく．上に述べたことより $f_\alpha(\xi)$ は β のとり方によらない．

$\alpha=\alpha_0+1$ のとき $\xi<\alpha$ ならば $\xi<\alpha_0$ か $\xi=\alpha_0$ である．$\xi<\alpha_0$ のとき $f_\alpha(\xi)=f_{\alpha_0}(\xi)$．$f_\alpha(\alpha_0)=G(f_{\alpha_0}\upharpoonright\alpha_0)$ とおく．f_α が α–近似であることはすぐわかる．

$F(\alpha)$ としては $\delta>\alpha$ に対するある δ–近似に対して $F(\alpha)=f_\delta(\alpha)$ とおけばよい．

条件をみたす F, F' があるとき $\forall\alpha(F(\alpha)=F'(\alpha))$ となることは α に関する超限帰納法ですぐわかる．

例　$\alpha+\beta$

$\alpha+0=\alpha$, $\alpha+\beta=\sup\{(\alpha+\gamma)+1\mid\gamma<\beta\}$　$(\beta\neq0)$，によって定義する．

例　$\alpha\cdot\beta$

$\alpha\cdot0=0$,　　$\alpha\cdot(\beta+1)=\alpha\cdot\beta+\alpha$,

$\alpha\cdot\beta=\sup\{\alpha\cdot\gamma\mid\gamma<\beta\}$　(β が極限数のとき)．

6°　整列可能定理

任意の集合 a に対し，$a=g``\alpha$ となる順序数 α および α 上の双射 $g:\alpha\to a$ が存在する．

［証明］ 選択公理によって $\mathbf{P}(a)-\{\emptyset\}$ より a への関数 f で，$x\in\mathbf{P}(a)$ $(x\neq\emptyset)$ に対して $f(x)\in x$ となるような関数 f が存在する．$\mathbf{P}(a)-\{\emptyset\}$ の元以外の x に対しては $f(x)=b$ (a のある元) とおく．そのとき f はすべての x に対して定義されるから，5°によって，任意の $\alpha\in\mathrm{On}$ に対して $F(\alpha)=f(a-\mathrm{W}(F\upharpoonright\alpha))$ となる On 上の関数 F が存在する．ここに $\mathrm{W}(F)$ は関数 F の値域すなわち $\{y\mid\exists x(\langle x,y\rangle\in F)\}$ である．$W(F\upharpoonright\alpha)$ は F の α 上の制限の値域 $F``\alpha=\{F(\beta)\mid\beta<\alpha\}$．

定義より $F(\alpha)$ はつねに a に属するから $\mathrm{W}(F)\subseteq a$，ゆえに $\mathrm{W}(F)$ は集合であ

る．このことからある α に対し，$a-\mathrm{W}(F\restriction\alpha)=\emptyset$ であることがわかる．

もし $\forall\alpha(a-\mathrm{W}(F\restriction\alpha)\neq\emptyset)$ ならば F は On 上双射（$\alpha<\beta\rightarrow F(\alpha)\neq F(\beta)$）となる．実際，$\forall\alpha(a-\mathrm{W}(F\restriction\alpha))\neq\emptyset$ ならば $\alpha<\beta$ のとき $F(\alpha)\in F``\beta=\mathrm{W}(F\restriction\beta)$ だから，$F(\alpha)\notin a-\mathrm{W}(F\restriction\beta)$，$F(\beta)=f(a-\mathrm{W}(F\restriction\beta))\in a-\mathrm{W}(F\restriction\beta)$ だから，$F(\alpha)\neq F(\beta)$．

F が On 上の双射なら $W(F)$ は集合ではないことになる．

ゆえに $a-\mathrm{W}(F\restriction\alpha)=\emptyset$ となる α が存在する．このような α の最小の値を α_0 とすれば，この α_0 と $g=F\restriction\alpha_0$ が求めるものである．

まず $\mathrm{W}(F)\subseteq a$ だから $a=\mathrm{W}(F\restriction\alpha_0)=g``\alpha_0$．$\beta<\alpha_0$ なら $a-\mathrm{W}(F\restriction\beta)\neq\emptyset$ だから上で見たやり方と同様に g は α_0 上では双射になる． □

以前に任意の自然数と一対一対応しないという意味での無限集合は可算集合を含むことは選択公理を用いて証明できると書いたが，それが今証明できる．

a がこの意味で無限集合だとし，a との双射をもつ順序数を α とする．そのとき α は任意の自然数より大きい順序数である．任意の自然数より大きい最小の順序数が ω だったのだから $\omega\leq\alpha$ でなければならない．a は ω と一対一対応する部分集合をふくむ．すなわち可算集合をふくむ．あとで見るように a の濃度は a との間に双射をもつ最小の順序数であると定義される．上のことによって任意の集合 a に対して濃度が存在することがいえる．ツェルメロはこれを証明するために選択公理を持ち込んだのである．

7 ノイマンの累積階層 (Cumulative Hierarchy)

（1）**定義．** α を任意の順序数とするとき $R(\alpha)$ を

$$R(\alpha)=\{x\mid\exists\gamma(\gamma<\alpha\wedge x\subseteq R(\gamma))\}=\bigcup_{\gamma<\alpha}\mathbf{P}(R(\gamma))$$

によって定義する．これは超限帰納法による関数の定義の例となっている．

実際，$G(x)=\{y\mid y=\mathbf{P}(z)\wedge z\in x\}$ とおけば，G は任意の x に対して定義された

関数で，

$$R(\alpha) = G(\mathrm{W}(R \restriction \alpha))$$

と書ける．

（2） **直接の結果**

（i）　$R(0) = \emptyset$．

（ii）　$R(\alpha+1) = R(\alpha) \cup \mathbf{P}(R(\alpha))$．

（iii）　$R(\alpha) = \bigcup_{\beta<\alpha} R(\beta)$．（$\alpha$ が極限数のとき）．

（iv）　$\alpha \leq \beta \Longrightarrow R(\alpha) \subseteq R(\beta)$．

（v）　$x \in R(\alpha) \Longrightarrow x \subseteq R(\alpha)$．すなわち $R(\alpha)$ は推移的である．

（vi）　$R(\alpha+1) = \mathbf{P}(R(\alpha))$．

（vii）　$\alpha < \beta \Longrightarrow R(\alpha) \in R(\beta)$．

［証明］（i），（ii），（iv）は定義から明らか．

（v）　$x \in R(\alpha)$ ならある $\gamma < \alpha$ があって $x \subseteq R(\gamma)$．（iv）によって $x \subseteq R(\alpha)$，

（vi）　（v）によって $x \in R(\alpha)$ なら $x \subseteq R(\alpha)$，$x \in \mathbf{P}(R(\alpha))$，ゆえに $R(\alpha) \subseteq \mathbf{P}(R(\alpha))$．ゆえに（ii）より $R(\alpha+1) = \mathbf{P}(R(\alpha))$．

（vii）　$\alpha < \beta$ なら $\alpha + 1 \leq \beta$.（iv）より $R(\alpha+1) \subseteq R(\beta)$．（vi）より $\mathbf{P}(R(\alpha)) \subseteq R(\beta)$．ゆえに $R(\alpha) \in R(\beta)$．

（iii）　α が極限数のとき $x \in R(\alpha)$ ならある $\gamma < \alpha$ に対して $x \in \mathrm{P}(R(\gamma)) = R(\gamma+1)$．$\gamma + 1 < \alpha$ だから $x \in \bigcup_{\beta<\alpha} R(\beta)$．ゆえに $R(\alpha) \subseteq x \in \bigcup_{\beta<\alpha} R(\beta)$．逆向きの $\supseteq$ はあきらか．

（3） **階数**

x は集合で，ある α に対して $x \in R(\alpha)$ だとすればこのような最小の α を γ とするとき，γ は第1種である．もし γ が極限数ならば $R(\gamma) = \bigcup_{\beta<\gamma} R(\beta)$．仮定によって，すべての $\beta < \gamma$ に対して $x \notin R(\beta)$ だから，$x \notin R(\gamma)$ となって矛盾する．

したがって，ある α に対して $x \in R(\alpha)$ となるような x に対して，$x \in R(\alpha+1) - R(\alpha)$ となるような α は存在するから，この α を $\mathrm{rank}(x)$ と書き，x の階数とい

う．すなわち $\mathrm{rank}(x)=\mu\alpha(x\in R(\alpha+1))$．

rank の性質

(viii) (a)　rank が定義される集合 y に対し，$x\in y$ ならば x の rank も定義され，$\mathrm{rank}(x)<\mathrm{rank}(y)$．

(b)　$\mathrm{rank}(y)=\sup\{\mathrm{rank}(x)+1\,|\,x\in y\}$．

［証明］ (a)　$\alpha=\mathrm{rank}(y)$ とすれば，$y\in R(\alpha+1)=\mathbf{P}(R(\alpha))$ だから，$y\subseteq R(\alpha)$，$x\in y$ ならば $x\in R(\alpha)$．したがって x も rank が定義されて $\mathrm{rank}(x)<\alpha$．

(b)　$\alpha=\sup\{\mathrm{rank}(x)+1\,|\,x\in y\}$ とおく．

$$x\in y\longrightarrow \mathrm{rank}(x)<\mathrm{rank}(y)\longrightarrow \mathrm{rank}(x)+1\leq \mathrm{rank}(y)$$

だから $\alpha\leq\mathrm{rank}(y)$．

$x\in y$ に対し $\mathrm{rank}(x)<\alpha$，ゆえに $x\in R(\alpha)$．したがって，$y\subseteq R(\alpha)$，$y\in R(\alpha+1)$．ゆえに $\mathrm{rank}(y)\leq\alpha$．

(ix)　順序数 α に対して $\alpha=\mathrm{rank}(\alpha)$

［証明］ 超限帰納法による．$\beta<\alpha$ に対して，$\mathrm{rank}(\beta)$ が定まり，$\beta=\mathrm{rank}(\beta)$ だとする．

$\mathrm{rank}(\alpha)\leq\alpha$ となること．$\alpha=\beta+1$ なら仮定によって，$\beta\in R(\beta+1)=R(\alpha)$．(v)，(vi)によって $\alpha=\beta\cup\{\beta\}\in R(\alpha+1)$．ゆえに，$\mathrm{rank}(\alpha)\leq\alpha$．$\alpha$ が極限数のときはあきらか．

$\alpha\leq\mathrm{rank}(\alpha)$ となること．(viii)によって $\beta<\alpha$ $(\beta\in\alpha)$ ならば，$\mathrm{rank}(\beta)<\mathrm{rank}(\alpha)$．仮定 $\beta=\mathrm{rank}(\beta)$ によって，$\beta<\mathrm{rank}(\alpha)$．ゆえに $\alpha\leq\mathrm{rank}(\alpha)$．

8° 正則性公理と $R(\alpha)$

$R(\alpha)$ の合併を $R=\bigcup_{\alpha\in O_n}R(\alpha)$ であらわす．R は集合とは限らぬ．

$V=R$ はすべての集合が rank をもつことを意味する．

(1)　$V=R\Longrightarrow$ 正則性公理 Reg，Reg′．

［証明］$A(a)$ を ZF の論理式とし，$\exists x A(x)$ とする．

$$\alpha_0 = \mu\alpha\, \exists x (A(x) \wedge \alpha = \mathrm{rank}(x))$$

とおく．$V=R$ なら α_0 はつねに存在する．$A(x) \wedge \alpha_0 = \mathrm{rank}(x)$ となるような x の1つを b とする．$c \in b$ ならば，$\mathrm{rank}(c) < \mathrm{rank}(b)$ (viii)．ゆえに $\neg A(c)$．すなわち

$$\exists x A(x) \longrightarrow \exists b (A(b) \wedge \forall x (x \in b \longrightarrow \neg A(x)))\,.$$

これは正則性公理 Reg′ であり，Reg はこの特別の場合であった．

（2） $\mathrm{Reg}' \Longrightarrow V=R$.

［証明］正則性公理 Reg′ は $A=\{x|A(x)\}$ とおくとき，

$$A \neq \emptyset \longrightarrow \exists u (u \in A \wedge u \cap A = \emptyset)$$

と同値になる．$A(a)$ として $a \notin R$ すなわち $\forall \alpha (a \notin R(\alpha))$ をとれば，これは ZF の論理式で，$A=\{x|A(x)\}$ は階数をもたない集合全体のクラスである．

$A \neq \emptyset$ とすれば，Reg′ によって，$u \in A$ が存在して，$A \cap u = \emptyset$ となる．$v \in u$ に対しては $v \notin A$ だから，$\mathrm{rank}(v)$ をもつ．$\alpha_0 = \mu\alpha(\forall v (v \in u \longrightarrow \mathrm{rank}(v) < \alpha))$ とおけば，$\mathrm{rank}(v) < \alpha_0$．ゆえに $v \in R(\alpha_0)$，したがって，$u \subseteq R(\alpha_0)$，$u \in R(\alpha_0+1)$ となって，$u \in A$ に矛盾する．したがって，$A=\emptyset$，したがって $V=R$ が成り立つ．

（3） $\mathrm{Reg} \Longrightarrow V=R$.

［証明］どの $R(\alpha)$ にも属さない x があったとする．x の推移的閉包を作る．$S_0 x = \{x\}$，$S_{n+1}x = \bigcup S_n x$，$S_\omega x = \bigcup_{n \in \omega} S_n x$．$S_\omega x$ は推移的である．$S_\omega x$ の元で，どの $R(\alpha)$ にも属さないものの集合を A とすれば，$x \in A$ だから，$A \neq \emptyset$．したがって公理 Reg によって，$u \cap A = \emptyset$ となる $u \in A$ が存在する．$v \in u$ ならば，推移性によって，$v \in S_\omega x$．$v \notin A$ だからある $R(\alpha)$ に属する．あとは（2）と同様にして，u もある $R(\alpha)$ に属することになって矛盾する．

（4） $\mathrm{Reg} \longleftrightarrow \mathrm{Reg}'$

［証明］（1），（2），（3）によって，公理 $\mathrm{Reg}' \longleftrightarrow V=R$，$\mathrm{Reg} \longleftrightarrow V=R$ だか

らである．

9° 基数

（1）対等，集合の濃度，基数

以下集合 A から集合 B への関数 $f: A \to B$ が単射なら $f: A \rightarrowtail B$，全射なら $f: A \twoheadrightarrow B$，双射なら $f: A \rightarrowtail\!\!\!\!\!\twoheadrightarrow B$ または $f: A \simeq B$ と書くことにする．

定義．集合 A から集合 B への双射 $f: A \simeq B$ があるとき，A と B は**対等**であるといい，$A \simeq B$ であらわす．

集合の濃度．整列可能定理より，任意の集合 A に対し，$A \simeq \alpha$ となる順序数 α のうち最小のものが存在する．これを A の濃度（Cardinality）といい，$|A|$ であらわす，すなわち

$$|A| = \mu\alpha(A \simeq \alpha).$$

基数．順序数は $\alpha = |\alpha|$ のとき，言い換えれば“$\beta < \alpha \to \alpha \simeq \beta$でない”が成立するとき基数（Cardinal number あるいは Cardinal）という．任意の集合 A に対し濃度 $|A|$ は基数である．（$|A|$ が基数でなければある $\beta < |A|$ に対し $A \simeq \beta$ となるから）．

$$A \simeq B \longleftrightarrow |A| = |B|$$

（2）直接の結果

基数は順序数だから相互に比較可能である．したがって任意の集合 A，B に対し，

（ｉ）　$$|A| < |B| \vee |A| = |B| \vee |B| < |A|$$

が成り立つ．

（ii）　$|A| \leq |B|$ ならば $f: A \rightarrowtail B$ がある．

$A \overset{g}{\simeq} |\mathrm{A}| \overset{i}{\rightarrowtail} |B| \overset{g'}{\simeq} |B|$ となる双射 g，g' があるからである．

（3）**カントール・ベルンシュタインの定理**

$$f: A \rightarrowtail B,\ g: B \rightarrowtail A \text{ があれば，} A \simeq B.$$

これはすでに証明したことである．

（4）**単射，全射と濃度**

（iii）$f: A \rightarrowtail B$ があれば $|A| \leq |B|$ である．（ii）と合わせて

$$f: A \rightarrowtail B \text{ がある} \longleftrightarrow |A| \leq |B|.$$

［証明］$f: A \rightarrowtail B$ があるのに $|B| < |A|$ だとする．$B \simeq |B| \overset{i}{\rightarrowtail} |A| \simeq A$ だから，$g: B \rightarrowtail A$ がある．C·B の定理によって，$A \simeq B$ すなわち $|B| = |A|$ となる．ゆえに $|B| < |A|$ ではない．$|A| \leq |B|$.

（iv）$f: A \twoheadrightarrow B$ があれば $|B| \leq |A|$ である（ZFC で）．

［証明］$y \in B$ に対して $f^{-1}(y) = \{x \in A \mid f(x) = y\}$ を考える．$f^{-1}(y)$ は A の部分集合で f は全射だから，任意の $y \in B$ に対して $f^{-1}(y)$ は空でない．$y \mapsto f^{-1}(y)$ によって定まる関数 $f^{-1}: B \to \mathbf{P}(A)$ は単射である．$y \neq y' \to f^{-1}(y) \cap f^{-1}(y') = \emptyset$（$f^{-1}(y) \neq f^{-1}(y')$）である．$\mathbf{P}(A)$ 上の選択関数 $\psi: \mathbf{P}(A) \to A$ と f^{-1} との合成 $B \overset{f^{-1}}{\rightarrowtail} \mathbf{P}(A) \overset{\psi}{\to} A$ を考えると，$y \neq y'$ に対して $\psi(f^{-1}(y)) \in f^{-1}(y)$，$\psi(f^{-1}(y')) \in f^{-1}(y')$ だから $\psi(f^{-1}(y)) \neq \psi(f^{-1}(y'))$．したがって $\psi \circ f^{-1}$ は B から A への単射を与える．（iii）によって $|B| \leq |A|$ である．

（5）無限基数については ω は最小の無限基数であること，無限基数はその真部分集合と一対一対応すること，無限基数はつねに極限数であることに注意しよう．最後のことは次のようにしてわかる．

無限基数 α が $\alpha = \beta + 1$ と書けたとすれば，β も無限，$\beta \simeq \beta + 1 = \alpha$．これは $\beta < \alpha$ なら $\beta \simeq \alpha$ ではないという基数の性質に反する．

（6）任意に大きな基数の存在（カントール）．

$$\text{任意の集合 } X \text{ に対し } |\mathbf{P}(X)| > |X|.$$

これもすでに証明したことである．$|X|=\varkappa$ のとき $|\mathbf{P}(X)|=2^{\varkappa}$ である．$\varkappa<2^{\varkappa}$ である．

10° アレフ

カントールの定理によって任意の基数 $\varkappa$ に対して $\varkappa$ より大きな基数がある．

$$\varkappa^{+}=\varkappa \text{ より大きな最小の基数}$$

によって $\varkappa^{+}$ を定義する．$\varkappa$ の次に大きな基数のことである．

任意の順序数 α に対して α 番目の無限基数 $\aleph_{\alpha}$ を定義する．

$$\aleph_0=\omega$$

$$\aleph_{\alpha+1}=\aleph_{\alpha}^{+}$$

$$\aleph_{\alpha}=\sup\{\aleph_{\beta}\,|\,\beta<\alpha\}\ \alpha \text{ が極限数のとき．}$$

X を基数の集合とするとき $\sup X$ は基数であることが知られている（証明略）．

カントールの連続仮説 CH および一般連続体仮説 GCH は次のように定式化される．

$$\text{CH}：2^{\aleph_0}=\aleph_1 \qquad \text{GCH}：2^{\aleph_{\alpha}}=\aleph_{\alpha+1}$$

無限基数 $\aleph_{\alpha}$，$\aleph_{\beta}$ に対し $\aleph_{\alpha}+\aleph_{\beta}$ は

$$|A|=\aleph_{\alpha},\ |B|=\aleph_{\beta},\ A\cap B=\emptyset \text{ のとき，} \aleph_{\alpha}+\aleph_{\beta}=|A\cup B|$$

によって定義する．これは A，B の選び方によらないことがわかる．

$\aleph_{\alpha}\cdot\aleph_{\beta}$ は $|\aleph_{\alpha}\times\aleph_{\beta}|$ によって定義する．このとき次が成立つ．(AC が必要)．

$$\aleph_{\alpha}+\aleph_{\beta}=\aleph_{\alpha}\cdot\aleph_{\beta}=\max(\aleph_{\alpha},\aleph_{\beta}).$$

証明は省略する．(「入門」V章参照)．

11° 相対無矛盾性の証明

モデルは集合であり，それ自身公理論的集合論の対象であるから公理論的集合論

のもとでは証明論とモデル論が連動する．証明論の問題がモデル論的に解かれる．たとえば相対無矛盾性の証明である．

A をある命題，あるいは命題の集合とする．A が ZF(ないし ZFC) $-A$ に対して相対無矛盾であるとは

$$\text{ZF(ないし ZFC)} - A \text{ が無矛盾} \Longrightarrow \text{ZF(ZFC)} + A \text{ が無矛盾}$$

ということである．

われわれはモデルを集合に限らず一般のクラスモデルを考える．すなわち ZF の論理式 $M(a)$ に対してクラス $M=\{x|M(x)\}$ を考え，$x\in y$, $x=y$ を M におけるそれに解釈することによる論理式 φ と自由変数の指定 e に対して $M\vDash\varphi[e]$ の概念を定義する．この場合 $M\vDash\varphi[e]$ 自身 ZF の論理式と考えられるが，集合論は $M\vDash\varphi[e]$ のことを $\varphi_M[e]$ と書き，φ の M における相対化と呼ぶ．

すなわち $\bar{x},\bar{y}\in M$ に対して，$(\bar{x}\in\bar{y})_M$, $(\bar{x}=\bar{y})_M$ は $\bar{x}\in\bar{y}$, $\bar{x}=\bar{y}$ のこと．

$\varphi(a_1,\ldots,a_n)$, $\psi(a_1,\ldots,a_n)$ と $\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n\in M$ に対して

$(\neg\varphi)_M[\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n]$　は　$\neg\varphi_M[\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n]$　のこと

$(\varphi\wedge\psi)_M[\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n]$　は　$\varphi_M[\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n]\wedge\psi_M[\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n]$　のこと

$\vee$，$\rightarrow$ についても同様．

$(\forall x\varphi(x))_M[\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n]$　は　$(\forall x\in M)\varphi_M[x,\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n]$　のこと

$(\exists x\varphi(x))_M[\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n]$　は　$(\exists x\in M)\varphi_M[x,\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n]$　のこと

だと定義するのである．

A の ZF(ZFC) $-A$ に対する相対無矛盾性を証明するには ZF(ZFC) $-A$ においてある M を定義し M が ZF(ZFC) $+A$ のモデルであることを ZF(ZFC) $-A$ において証明すればよい．すなわち ZF(ZFC) $+A$ の任意の文に対し ZF(ZFC) $-A\vdash\varphi_M$ をいえばよい．

実際，ZF(ZFC) $+A$ が矛盾とする．$\curlywedge$ を矛盾をあらわす文たとえば $0=1$ （すな

わち $\emptyset=\{\emptyset\}$）として ZF(ZFC)$+A\vdash$ 人 とする．そのときは ZF(ZFC)$+A$ の有限個の文 $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ があって

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \text{人} \text{ in H}$$

となる．

述語論理の健全性定理によって $(\varphi_1)_M, \ldots, (\varphi_n)_M \vdash$ 人 in H となる．しかるに ZF(ZFC)$-A\vdash(\varphi_1)_M, \ldots, (\varphi_n)_M$ だから，ZF(ZFC)$-A\vdash$ 人 となる．

$$\text{ZF(ZFC)}+A \text{ が矛盾する} \Longrightarrow \text{ZF(ZFC)}-A \text{ が矛盾する}$$

が ZF(ZFC)$-A$ の中でいえたわけだから対偶をとって

$$\text{ZF(ZFC)}-A \text{ が無矛盾} \Longrightarrow \text{ZF(ZFC)}+A \text{ が無矛盾}$$

が ZF(ZFC)$-A$ の中でいえるわけである．

この方法はノイマンによって正則性公理（Reg）に対してはじめて適用され(1925)，ゲーデル（1938），コーヘン（1963）に受け継がれるのである．

この方法を例示する前に論理式のモデル上の絶対性について論じよう．

12° 絶対性

（1）**定義**．$A(a_1, \ldots, a_n)$ を ZF の論理式，Mをクラスとする．任意の $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n \in M$ に対し，

$$A_M(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) \longleftrightarrow A(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$$

が成立つとき論理式 A は M に対し（あるいは M 上）絶対的であるという．

（2）**制限論理式**．ZF の論理式 φ において量記号 $\forall x$，$\exists x$ がすべて（$\forall x \in y$），（$\exists x \in y$）の形で入っているとき φ は制限論理式であるという．厳密にいえば論理式 $\varphi(a_1, \ldots, a_n)$（$\varphi(\vec{a})$ と略記する）の定義にあたり $\exists x$，$\forall x$ が導入されたとき，かならず次の形になっていることである．

$$(\exists x\in a)\,\psi(x,a,\vec{a})\quad \text{すなわち}\quad \exists x(x\in a\wedge\psi(x,a,\vec{a}))$$

$$(\forall x\in a)\,\psi(x,a,\vec{a})\quad \text{すなわち}\quad \forall x(x\in a\rightarrow\psi(x,a,\vec{a}))$$

補題. Mが推移的クラスのとき，任意の制限論理式はMに対して絶対的である．

［証明］ φが原子論理式のとき，$\bar{x},\bar{y}\in M$に対し，定義より

$$(\bar{x}\in\bar{y})_M\longleftrightarrow\bar{x}\in\bar{y}$$

$$(\bar{x}=\bar{y})_M\longleftrightarrow\bar{x}=\bar{y}$$

だから φ，ψ に対し

$$\varphi_M(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n)\longleftrightarrow\varphi(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n)$$

$$\psi_M(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n)\longleftrightarrow\psi(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n)$$

がすべての $\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n\in M$ について成立つとき，$\neg\varphi$，$\varphi\wedge\psi$，$\varphi\vee\psi$，$\varphi\rightarrow\psi$ に対しても成立つことも自明である．

$\varphi(a,\vec{a})$ が $(\exists x\in a)\,\psi(x,a,\vec{a})$ で，ψ に対して成立つとする．$\bar{x},\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n\in M$ に対し

$$\varphi_M(\bar{x},\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n)\longleftrightarrow M\vDash\exists u(u\in\bar{x}\wedge\psi(u,\bar{x},\ldots,\bar{x}_n))\quad\text{定義より}$$

$$\longleftrightarrow u\in M\text{があって }M\vDash(u\in\bar{x}\wedge\psi(u,\bar{x},\ldots,\bar{x}_n))$$

これより $(\exists u\in\bar{x})\,\psi(u,\bar{x},\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n)$ が導かれる

逆に $\varphi(\bar{x},\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n))$，すなわち $\exists u(u\in\bar{x}\wedge\psi(u,\bar{x},\ldots,\bar{x}_n)$ ならば，$\bar{x}\in M$，$u\in\bar{x}$ だから推移性により $u\in M$. すなわち $u\in M$ があって $u\in\bar{x}\wedge\psi(u,\bar{x},\ldots,\bar{x}_n)$．$\psi$ に関する仮定によって

$$u\in M\text{があって }(u\in\bar{x})_M\wedge\psi_M(u,\bar{x},\ldots,\bar{x}_n)$$

これは $\varphi_M(\bar{x},\ldots,\bar{x}_n)$ を意味する．

系. 次の論理式は任意の推移的クラスに対して絶対的である．

$a\in b$，$a=b$，$a\subseteq b$，$a=\emptyset$（空集合），$c=\{a,b\}$，$c=\langle a,b\rangle$，$c=a\cup b$，$c=a\cap b$，$b\in\mathrm{dom}(a)$，$b\in\mathrm{ran}(a)$，

$\mathrm{Fnc}(f:a,b)$ (f は a から b への関数である), f は関数である,

$\mathrm{inj}(f:a,b)$ (f は a から b への単射である),

$\mathrm{bij}(f:a,b)$ (f は a から b への双射である),

$b=f[a]$, $g=f\restriction a$, $\mathrm{Ord}(a)$ (a は順序数である),

$\mathrm{K_I}(a)$, $\mathrm{K_{II}}(a)$ (a は第1種, 第2種の順序数である), $a=\omega$,

$\mathrm{Nat}(a)$ (a は自然数である).

証明はどの本にもある[コーヘン]にも「入門」にも.

13° 正則性公理の相対無矛盾性

$$\mathrm{ZFC}-\{\mathrm{Reg}\} \text{ が無矛盾} \Longrightarrow \mathrm{ZFC} \text{ が無矛盾}$$

をいうのである. 11° の $A=\{\mathrm{Reg}\}$ の場合で, これをいうには $\mathrm{ZFC}-\{\mathrm{Reg}\}$ の中で M を定義し

$$\mathrm{ZFC}\text{-}\{\mathrm{Reg}\}\vdash \mathrm{M} \text{ は ZFC のモデルである}$$

をいえば十分である. M として $R=\bigcup_{\alpha\in\mathrm{On}}R(\alpha)$ をとる.

$$x\in R \longleftrightarrow \exists\alpha(x\in R(\alpha))$$

だから R は ZF の論理式から定義されるクラスである.

(1) 順序数論および累積階層 $R(\alpha)$ の理論は正則性公理なしに展開されるから, R は $\mathrm{ZFC}-\{\mathrm{Reg}\}$ で定義される. R は推移的である. ($R(\alpha)$ が推移的).

(2) R が ZFC のモデルであること.

(i) 空集合の公理. $\emptyset\in R(\{0\})\subseteq R$ より明らか.

(ii) 外延性公理 $\forall\bar{x}\forall\bar{y}(\forall\bar{z}(\bar{z}\in\bar{x}\longleftrightarrow\bar{z}\in\bar{y})\longleftrightarrow\bar{x}=\bar{y})$.

これは $\forall\bar{z}(\bar{z}\in\bar{x}\longleftrightarrow\bar{z}\in\bar{y})$ は $(\bar{x}=\bar{y})_R$ のことであり, 絶対性より

$$(\bar{x}=\bar{y})_R\longleftrightarrow\bar{x}=\bar{y}$$

であるから明らか.

等号公理 $\forall\bar{x}\forall\bar{y}\forall\bar{z}(\bar{x}=\bar{y}\to\bar{x}\in\bar{z}\longleftrightarrow\bar{y}\in\bar{z})$ も＝と∈の絶対性から明らか．外延性公理，等号公理はすべての推移的クラスに対して成立つのである．

(iii)　対の公理．$x\in R(\alpha)$, $y\in R(\beta)$ とする．$\gamma=\max(\alpha,\beta)$ とすれば $x\in R(\gamma)$, $y\in R(\gamma)$，$\{x,y\}\subseteq R(\gamma)$，$\{x,y\}\in R(\gamma+1)$．すなわち

$$x,y\in R\to\{x,y\}\in R.$$

(iv)　合併の公理．$x\in R(\alpha)\to\bigcup x\in R(\alpha+1)$ をいえば十分である．

$$z\in\bigcup x\to\ \exists y(z\in y\wedge y\in x)\to z\in R(\alpha)\quad(R(\alpha)\text{ の推移性}).$$

ゆえに $\bigcup x\subseteq R(\alpha)$，ゆえに $\bigcup x\in R(\alpha+1)$．

(v)　ベキ集合の公理．$x\in R(\alpha)\to\mathbf{P}(x)\in R(\alpha+2)$ をいえば十分である．$x\in R(\alpha)$ ならば，

$$y\subseteq x\longrightarrow y\subseteq R(\alpha)\longrightarrow y\in R(\alpha+1).$$

すなわち $y\in\mathbf{P}(x)\to y\in R(\alpha+1)$，したがって $\mathbf{P}(x)\subseteq R(\alpha+1)$，ゆえに $\mathrm{P}(x)\in R(\alpha+2)$．

(vi)　無限集合の公理．$\omega\in R(\omega+1)$ ($\alpha=\mathrm{rank}(\alpha)$ より出る)．ゆえに $\omega\in R$.

(vii)　AC_R が $ZFC-\{\mathrm{Reg}\}$ の AC から出ることはあきらか．

(viii)　置換公理．$\forall\bar{x}\forall\bar{y}\forall\bar{z}(A_R(\bar{x},\bar{y})\wedge A_R(\bar{x},\bar{z})\to\bar{y}=\bar{z})$ が成立つとする．($A(a,b)$ は ZF の論理式)．

$\{\langle\bar{x},\bar{y}\rangle\,|\,A_R(\bar{x},\bar{y})$ はある関数 F_R を定義し，F_R をある $\bar{u}\in R$ に制限したものはその値域としてある $\bar{v}\subseteq R$ を定める．($x\in R\wedge A_R(x,y)$ に対して置換公理を適用すればよい)．ところが $\bar{v}\subseteq R$ ならば $\bar{v}\in R$ であり，置換公理の R への相対化が成立つ．

(iv)　正則性公理．すでに示した $V=R\to\mathrm{Reg}$，Reg' がそれである．

14° 選択公理，一般連続体仮説の相対無矛盾性

（1）定義可能集合

集合 A が与えられたとき，いかなる A の部分集合が ZF の中で定義可能であるとみなすべきかという問に対し ZF の論理式 $\varphi(a_0, \ldots, a_{n-1}, b)$ によって

$$\{x \in A \mid \varphi_A(v_0, \ldots, v_{n-1}, x)\}, \ v_0, \ldots, v_{n-1} \in A \qquad (*)$$

であらわされる集合がそれであるという考えが次第に定着してきた．ここに φ_A は φ の A への相対化である．この形の集合は，論理式 φ とパラメータ $v_0, \ldots, v_{n-1} \in A$ によって A 内で定義可能な集合と呼ばれ，このような 集合の全体を $\mathrm{Def}(A)$ と書く．

しかし

$$\{\langle v_0, \ldots, v_{n-1}\rangle \in A^n \mid \varphi_A(v_0, \ldots, v_{n-1})\} \qquad (**)$$

の形の集合全体を $\mathrm{Df}(A, n)$ と書き φ の複雑さ（論理記号の数）が $\leq k$ の論理式によって(**)の形で定義される集合の全体を $\mathrm{Df}(k, A, n)$ とするとき，これを通じて結局は，$\mathrm{Def}(A)$ は ZF 内である関数として定義され次の性質をもつことがわかる．

補題．（a） $\mathrm{Def}(A) \subseteq \mathbf{P}(A)$．

（b） A が推移的なら $A \subseteq \mathrm{Def}(A)$．

（c） $X \subseteq A$，$|X| < \omega$ ならば $X \in \mathrm{Def}(A)$．

（d） (AC を用いて) $|A| \geq \omega \to |\mathrm{Def}(A)| = |A|$．

［証明］（a）はあきらか．

（b） $v \in A$ とする．$\{x \in A \mid x \in v\} \in \mathrm{Def}(A)$ だが，A が推移的なら，これは $v \in \mathrm{Def}(A)$ を意味する．すなわち $v \in A \to v \in \mathrm{Def}(A)$．ゆえに $A \subseteq \mathrm{Def}(A)$．

（c） $v \in A \to \{v\} \in \mathrm{Def}(A)$，$X, Y \in \mathrm{Def}(A) \to X \cup Y \in \mathrm{Def}(A)$ はすぐわかる．

X を A の有限部分集合とし $X=\{v_1,\ldots,v_k\}$ とすれば

$$X=\{v_1\}\cup\ldots\cup\{v_k\}\in \mathrm{Def}(A).$$

（d）　パラメータを固定すれば論理式はたかだか可算個だから $|\mathrm{Df}(A,n)|\leq\omega$. A が無限集合のときは $|A^n|=|A|$ だから $|\mathrm{Def}(A)|\leq|A|$ がわかる．$|A|\leq|\mathrm{Def}(A)|$ は $v\in A\to\{v\}\in\mathrm{Def}(A)$ よりわかる．

（2）**構成的集合**

順序数 α に対する $L(\alpha)$, および L の定義

（i）　$L(0)=\emptyset$.

（ii）　$L(\alpha+1)=\mathrm{Def}(L(\alpha))$.

（iii）　$L(\alpha)=\bigcup_{\beta<\alpha}L(\beta)$　（α が極限数のとき）.

（iv）　$L=\bigcup_{\alpha\in\mathrm{On}}L(\alpha)$ L の元のことを構成的集合 (Constructible set) という．

補題.（a）　任意の $\alpha\in\mathrm{On}$ に対し，$L(\alpha)$ は推移的である．

（b）　$\beta\leq\alpha\longrightarrow L(\beta)\subseteq L(\alpha)$.

［証明］α に対する超限帰納法によって（a），（b）を同時に証明する．

α が 0 か極限数のときはあきらか．$\alpha=\beta+1$ のとき（1）の補題により $L(\beta)$ が推移的なら

$$L(\beta)\subseteq\mathrm{Def}(L(\beta))=L(\alpha)\subseteq\mathbf{P}(L(\beta)).$$

$x\in L(\alpha)$ なら $x\subseteq L(\beta)\subseteq L(\alpha)$ だから $L(\alpha)$ も推移的である．

定義　$x\in L$ に対する L-rank $\rho(x)$ を $\rho(x)=\mu\beta(x\in L(\beta+1))$ によって定義する．

補題.（c）　$L(\alpha)=\{x\in L\,|\,\rho(x)<\alpha\}$.

（d）　$x,y\in L$, $y\in x$ ならば，$\rho(y)<\rho(x)$.

（e）　任意の α に対し，$\alpha=L(\alpha)\cap\mathrm{On}$, $\alpha\in L(\alpha+1)$.

（f）　$\mathrm{On}\subseteq L$, $\alpha=\rho(\alpha)$.

［証明］（c）は定義よりあきらか．（d）は rank の場合と同様．

（e） α に関する超限帰納法で，$\alpha=L(\alpha)\cap\mathrm{On}$ をいう．$\beta<\alpha$ に対しては成立しているとする．α が 0 か極限数のとき α に対して成立つことはあきらか．$\alpha=\beta+1$ とし，$\beta=L(\beta)\cap\mathrm{On}$ とする．$L(\beta)\subseteq L(\alpha)\subseteq\mathbf{P}(L(\beta)$ だから On との共通分をとって $\beta\subseteq L(\alpha)\cap\mathrm{On})$．

$\mathbf{P}(L(\beta))\cap\mathrm{On}\subseteq\alpha$ のこと．

$$\begin{aligned}\gamma\in P(L(\beta))\cap\mathrm{On}&\to\gamma\subseteq L(\beta)\wedge\gamma\in\mathrm{On}\\&\to\gamma\subseteq L(\beta)\wedge\gamma\subseteq\mathrm{On}\\&\to\gamma\subseteq L(\beta)\cap\mathrm{On}\\&\to\gamma\subseteq\beta\\&\to\gamma\in\alpha\end{aligned}$$

$\beta\in L(\alpha)$ ならば $L(\alpha)\cap\mathrm{On}=\alpha$ がいえる．しかるに

$$\beta=L(\beta)\cap\mathrm{On}=\{x\in L(\beta)\mid\mathrm{Ord}_{L(\beta)}(x)\}\in\mathrm{Def}(L(\beta))=L(\alpha)$$

$\mathrm{Ord}(x)$ は推移的集合 $L(\beta)$ 上絶対的であることを用いた．また上式は任意の β に対して $\beta\in L(\beta+1)$ であることを示している．

（f） $\alpha\in L(\alpha+1)$ は $\mathrm{On}\subseteq L$ を示している．

$\alpha=\rho(\alpha)$ について．$\alpha\in L(\alpha+1)$ より $\rho(\alpha)\leq\alpha$.

$\alpha\leq\rho(\alpha)$ のこと．$\beta<\alpha$ に対して正しいとすると，

$$\beta<\alpha\longrightarrow\rho(\beta)<\rho(\alpha)\longrightarrow\beta<\rho(\alpha).$$

ゆえに $\alpha\leq\rho(\alpha)$． □

補題. （g） $L(\alpha)\in L(\alpha+1)$.

［証明］ $L(\alpha)=\{x\in L(\alpha)\mid(x=x)_{L(\alpha)}\}$ だから，$L(\alpha)\in\mathrm{Def}(L(\alpha))=L(\alpha+1)$.

補題. （h） $n<\omega$ なら $L(n)=R(n)$．したがってまた $L(\omega)=R(\omega)$.

（i） $\alpha\geq\omega\to|L(\alpha)|=|\alpha|$．（AC を用いる）.

［証明］（h）は（1）の補題（c）によって $L(\alpha)$ の有限部分集合は $L(\alpha+1)$ に属す

ることを用い，n に関する帰納法でわかる．

$\alpha \subseteq L(\alpha)$ より $|\alpha| \leq |L(\alpha)|$．

$\alpha \geq \omega$ のとき $|\alpha| = |L(\alpha)|$ をいうのに $\beta < \alpha$ に対しては $\beta \geq \omega \to |L(\beta)| = |\beta|$ を仮定する．このとき $\forall \beta < \alpha(|L(\beta)| \leq |\alpha|)$ が成立つ．$\beta \geq \omega$ のときは $|L(\beta)| = |\beta| \leq |\alpha|$，$\beta < \omega$ のときは $|L(\beta)| = |R(\beta)| < \omega \leq |\alpha|$ だからである．

α が極限数のとき $L(\alpha) = \bigcup_{\beta<\alpha} L(\beta)$ は基数$\leq |\alpha|$ の集合の $|\alpha|$ 個の合併だから，AC によってその基数は $\leq |\alpha|$．したがってこのときは $|L(\alpha)| = |\alpha|$．

$\alpha = \beta + 1$ のときは $|L(\beta)| = |\beta| = |\alpha|$．$L(\alpha) = \mathrm{Def}(L(\beta))$ だから，(1)の補題(d)によって $|L(\alpha)| = |L(\beta)| = |\alpha|$．

(3) **定理**．L は ZF のモデルである

(i)　**空集合の公理，無限公理，外延性公理，等号公理，正則性公理**

外延性公理，等号公理，正則性公理は推移的クラスではつねに真となる．正則性公理については任意の $x \in L$ に対して $(\exists y \in x)(y \cap x = \emptyset)$ の L への相対化が真であることを要求するが，この式はその L への相対化と同値である．

$\emptyset, \omega \in L$ だから空集合の公理，無限公理も L 上真である．

(ii)　**対の公理，合併の公理**

$u, v \in L$ とすれば，ある $\alpha \in \mathrm{On}$ があって $u, v \in L(\alpha)$．

$$\{u, v\} = \{z \in L(\alpha) \mid (z = u \vee z = v)_{L(\alpha)}\}$$

だから $\{u, v\} \in L(\alpha+1) \subseteq L$．

$u \in L(\alpha)$ に対して

$$\bigcup u = \{x \in L(\alpha) \mid (\exists y(y \in u \wedge x \in y))_{L(\alpha)}$$

だから $\bigcup u \in L(\alpha+1) \subseteq L$．

(iii)　**分出公理**

これを証明するためには次の反映原理（Reflection principle）を使う．

補題（反映原理）．$\varphi(a_1, \ldots, a_n)$ を任意の ZF 論理式とするとき，任意の α に

対し適当に $\beta \geq \alpha$ をとって

$$(\forall x_1, \ldots, x_n \in L(\beta))[\varphi_L(x_1, \ldots, x_n) \longleftrightarrow \varphi_{L(\beta)}(x_1, \ldots, x_n)]$$

が成り立つようにできる.

［証明］ φ は論理記号として$\neg$, $\vee$, $\exists$ だけを含んでいると仮定してよい.（他の論理記号はこれらで表わされる).

φ の部分論理式の全体を $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ とする. φ_i が $\exists x \psi_i(x, y_1, \ldots, y_k)$ の形をしているとき, $\xi \in \mathrm{On}$ および $y_1, \ldots, y_k \in L(\xi)$ に対し $G_i(\xi, y_1, \ldots, y_k)$ を次のように定める.

$(\exists x \in L)\psi_{iL}(x, y_1, \ldots, y_k)$ のとき,

$$G_i(\xi, y_1, \ldots, y_k) = \mu\eta[(\exists x \in L(\eta))\psi_{iL}(x, y_1, \ldots, y_k)]$$

そうでないとき, $G_i(\xi, y_1, \ldots, y_k) = 0$.

そうして

$$F(\xi) = \sup\{G_i(\xi, y_1, \ldots, y_k) \mid y_1, \ldots, y_k \in L(\xi)\}$$

とおく. φ_i が $\exists x \psi(x, y_1, \ldots, y_k)$ の形をしていない場合にはすべての $\xi \in \mathrm{On}$ に対して $F_i(\xi) = 0$ としておく.

いま,

$$\alpha_0 = \alpha, \quad \alpha_{i+1} = \max\{\alpha_i + 1, F_1(\alpha_i), \ldots, F_k(\alpha_i)\}$$

とし, $\beta = \bigcup_{i \in \omega} \alpha_i$ とすればこの β が求めるものである. □

任意の論理式 $\varphi(a, a_1, \ldots, a_n)$ と $v_1, v_2, \ldots, v_n, w \in L$ に対し,

$$\{x \in w \mid L \vDash \psi(x, v_1, \ldots, v_n)\} \in L$$

をいえば十分だが, $v_1, \ldots, v_n, w \in L(\alpha)$ となる α に対して上の補題のような β をとると

$$\{x \in w \mid \varphi_L(x, v_1, \ldots, v_n)\} = \{x \in L(\beta) \mid (x \in w) \wedge \varphi_{L(\beta)}(x, v_1, \ldots, v_n)\}$$

であるから，この集合は $\mathrm{Def}(L(\beta))=L(\beta+1)$ に属し，したがって L に属する．

（iv）　**ベキ集合の公理，置換公理**

分出公理が L で成立つおかげで，この 2 つの公理が成立つことの証明が簡単になる．

（2）の補題（g），$L(\alpha)\in L(\alpha+1)$ に注意する．これによって

集合 x が $x\subseteq L$ なら，$x\subseteq y\wedge y\in L$ となる集合 y が存在する

が成立つ．$x\subseteq L$ ならある α に対し $x\subseteq L(\alpha)$ となる．（$\alpha=\sup\{\rho(z)\,|\,z\in x\}+1$ とおけばよい）．このとき $y=L(\alpha)$ とおけば $y\in L(\alpha+1)\subseteq L$ である．

ベキ集合の公理は，$L\vDash\exists y(x\subseteq u\leftrightarrow x\in y)$ を要求するが，分出公理が成立つから

$$L\vDash(\exists y'\in L)(x\subseteq u\rightarrow x\in y')$$

をいえば十分である．分出公理によって $\{x\in y'\,|\,x\subseteq u\}$ を作ればよいからである．これは $(\exists y'\in L)(\mathrm{P}(u)\cap L\subseteq y')$ と同値だが，これが成立つことは上に述べたことによってあきらかである．

置換公理．L の中で置換公理の仮定が成立っているとする．すなわち関数 $F=\{\langle x,y\rangle\in L\,|\,L\vDash\varphi(x,y)\}$ が与えられているとして $u\in L$ に対し，$F\in L$ を示せばよいのだが分出公理のおかげで，$F\subseteq y$ となる $y\in L$ の存在を示せば十分である．それは成立する．

（4）**構成可能公理**

（i）　**定義**．構成可能公理（Axiom of Constructibility）とはすべての集合は構成可能集合であることを要請するものである．すなわち

$$V=L\quad\text{または}\quad\forall x\,\exists\alpha(x\in L(\alpha))$$

と表現される．

以下，モデル L で構成可能公理 $V=L$ が成立つことをいう．すなわち $(V=L)_L$ が正しいことをいう．

（ii） **補題.** $L(\alpha)$ は ZF の任意の推移的モデルに関して絶対的である．すなわち ZF の任意の推移モデル M に対し $(x\in L(\alpha))_M \longleftrightarrow x\in L(\alpha)$.

ここでは証明しないが $\mathrm{Df}(A,n)$ が絶対的であることから $\mathrm{Def}(A)$ が絶対的であることを導き $\mathrm{Def}(A)$ を用いて超限帰納的に定義される $L(\alpha)$ も絶対的であるという風に証明される．(「公集」 5 章5.7 参照).

（iii） **定理** (ZF でいえる)．L は $\mathrm{ZF}+(V=L)$ のモデルである．

$(V=L)_L$，すなわち $\forall x\in L\,\exists\alpha\in L(x\in L(\alpha))_L$ をいえばよい．$x\in L$ をとる．$x\in L(\alpha)$ となる α がある．$\mathrm{On}\subseteq L$ だから $\alpha\in L$ であり，（ii）によって $L(\alpha)$ は ZF のモデル L に関して絶対的だから $(x\in L(\alpha))_L$ が成立つ．

（iv） **系.** ZF が無矛盾ならば $\mathrm{ZF}+\ (V=L)$ は無矛盾である．

11° で説明した相対無矛盾性証明の一般論から出る．

（v） **定理.** (L の最小性)．M が全ての順序数をふくむ ZF の推移モデルならば

$$L=L_M\subseteq M$$

証明は簡単である．$L(\alpha)$ と On の M に対する絶対性から

$$L_M=\{x\in M|\,(\exists\alpha(x\in L(\alpha))_M\}=\bigcup_{\alpha\in\mathrm{On}}L(\alpha)=L\subseteq M$$

となるのである．

注） 集合でない真のクラス（固有類）であるような ZF のモデルはつねに全順序数をふくむ．すなわち $\mathrm{On}\subseteq M$ である．なぜなら α を任意の順序数とすれば $M\subseteq R(\alpha)$ ではないのだから，$\mathrm{rank}(x)\geq\alpha$ となる $x\in M$ がある．ところで ZF の推移モデルに関しては $\mathrm{rank}(x)$ は絶対的であることがいえ $\mathrm{rank}(x)\in M$，したがって推移性から $\alpha\in M$ となる．ゆえに上の定理は，L は固有類であるような ZF の推移モデルのうち最小のものであることを主張するものである．

ここに至ってゲーデルの思索の後を推察することができる．

（5）なぜ L なのか.

（i） GCH の ZF に対する相対無矛盾性をいうには GCH が成立つような（そのことが ZF で証明可能な）ZF の推移モデル M をつくることができればよい.

（ii） 集合であるような ZF のモデル M の存在は第二不完全性定理により ZF 内では証明不可能だから（i）の条件をみたすモデルは固有類の推移モデルでなければならない.

（iii） もし ZF の固有類推移モデルで（i）の条件をみたすものがあり，固有推移モデルの中に最小モデル L があれば，それが求めるものである．なぜならその場合，L はもっとも薄い（集合が少ない）ものであり，したがって GCH がもっとも成立しやすいものだからである.

（iv） 推移的固有類が ZF のモデルになるような最低限の条件をしらべ，その最低限の条件をみたすような L を捜す．その最低限の条件は，1938年の論文では $A \in M \Longrightarrow \mathrm{Def}(A) \subseteq M$（これはけっきょく分出公理が成立つための条件である）であり，1940年の講義では M がゲーデル作用素に関して閉じているという条件である．いずれも同じ L に行きつく（[Jech] はこの方法を採用している）.

（6）**定理.** $(V=L) \to AC$.

[証明] α に関する帰納法によって $L(\alpha)$ 上の整列順序 $\lhd_\alpha = \lhd(\alpha)$ を定義する.

$\lhd_0 = 0$ でよい.

α が極限数のとき

$\lhd_\alpha = \{\langle x, y\rangle \in L(\alpha) \times L(\alpha) \mid \rho(x) < \rho(y) \vee (\rho(x) = \rho(y) \wedge \langle x, y\rangle \lhd(\rho(x)+1))\}$.

$\lhd_\alpha^n$ は $L(\alpha)^n$ 上の $\lhd_\alpha$ から誘導された辞書式順序とする．すなわち

$$s \lhd_\alpha^n t \longleftrightarrow \exists k \langle n (s \restriction k = t \restriction k \wedge s(k) \lhd_\alpha t(k))$$

とする．$X \in L(\alpha+1) = \mathrm{Def}(L(\alpha))$ の場合には定義から

$$\exists s\in L(\alpha)^n\,\exists R\in \mathrm{Df}(L(\alpha),n+1)\,(X=\{x\in L(\alpha)\mid s^\frown\langle x\rangle\in R\})$$

が成立つ．その意味は論理式 $\varphi(a_1,\ldots,a_n,a_{n+1})$ があって

$$X=\{x\in L(\alpha)\mid \varphi_{L(\alpha)}(s_1,\ldots,s_n,x)\}$$

に書けたとき，$s=\langle s_1,\ldots,s_n\rangle\in L(\alpha)^n$．そして

$$R=\{\langle s_1,\ldots,s_{n+1}\rangle\mid \varphi_{L(\alpha)}(s_1,\ldots,s_{n+1})\}$$

とおくとき

$$X=\{x\in L(\alpha)\mid s^\frown\langle x\rangle=\langle s_1,\ldots,s_n,x\rangle\in R\}$$

になるということである．これが成立つような n の最小値を n_x とし，

$$\exists R\in \mathrm{Df}(L(\alpha),n_x+1)\,(X=\{x\in L(\alpha)\mid s^\frown\langle x\rangle\in R\})$$

となる $s\in L(\alpha)^{n_x}$ があるからその中で $\lhd_\alpha^{n_x}$ に関して最小のものを s_x とし，また

$$X=\{x\in L(\alpha)\mid \varphi_{L(\alpha)}(s_x,x)\}$$

となる論理式 φ があるからそのゲーデル数の最小のものを m_x とする．

$X,Y\in L(\alpha+1)$ に対して $X\lhd_{\alpha+1}Y$ を次のように定義する．

（a） $X,Y\in L(\alpha)$ かつ $X\lhd_\alpha Y$，あるいは

（b） $X\in L(\alpha)$ かつ $Y\notin L(\alpha)$，あるいは

（c） $X,Y\notin L(\alpha)$ かつ

$$(n_x<n_y)\vee(n_x=n_y\wedge s_x\lhd_\alpha^{n_x}s_y)\vee(n_x=n_y\wedge s_x=s_y\wedge m_x<m_y)$$

実際，$\lhd_\alpha$ が $L(\alpha)$ の整列順序であることは一つ一つチェックすればわかる．

α が極限数のとき $L(\alpha)=\{x|\rho(x)<\alpha\}$ （(2)補題(c)）だから $x\in L(\alpha)$ に対して $\rho(x)+1\leq\alpha$ となるが α は極限数だから $\rho(x)+1<\alpha$，したがって帰納法の仮定によって $\lhd(\rho(x)+1)$ は整列順序としてすでに定義されている．$\lhd_\alpha$ が整列順序ならそれから誘導された辞書式順序 $\lhd_\alpha^n$ も整列順序であることはよく知られたこと

がらである．３重対 $\langle n_x, s_x, m_x \rangle$ に対する順序も整列順序である．

さて $x \in L$ に対しては，ある α に対して $x \in L(\alpha)$，したがって $x \subseteq L(\alpha)$．$x \neq \emptyset$ のとき，X の中の $\lhd_\alpha$ に関する最小元を対応させればすべての $x \in L$ $(x \neq \emptyset)$ に対して一挙に選択関数が作れる．

$V=L \longrightarrow AC$ がいえたわけである．

（７）$(V=L) \longrightarrow GCH.$

（ｉ）**補題．** X が推移的集合のとき

$$(\exists \alpha : \text{極限数})[X=L(\alpha)] \longleftrightarrow \begin{bmatrix} (\mathrm{a})\ X \vDash \forall x \exists \beta (x \in L(\beta)) \text{かつ} \\ (\mathrm{b})\ X \vDash \forall \beta \exists y (y=L(\beta)) \end{bmatrix}$$

［証明］→は明らか．←をいう．X が(ａ)，(ｂ)をみたすとする．

(ａ)は $X \subseteq \bigcup_{\beta \in X \cap \mathrm{On}} L(\beta)$ を意味し，(ｂ)は

$$\beta \in X \cap \mathrm{On} \longrightarrow L_\beta \in X \longrightarrow L_\beta \subseteq X$$

を意味するから $\bigcup_{\beta \in X \cap \mathrm{On}} L(\beta) \subseteq X$ である．したがって $X = \bigcup_{\beta \in X \cap \mathrm{On}} L(\beta)$ である．$X \cap \mathrm{On} = \alpha$ とおくと X は推移的だから α は順序数となる．$\alpha = \gamma + 1$ だとすると $\gamma \in \alpha = X \cap \mathrm{On}$ だから $\gamma \in X$，したがって $\exists \beta \in X(\gamma \in L(\beta))$，ゆえに $\gamma < \beta$．γ は α の最大数だったからこれは矛盾である．ゆえに α は極限数で $X = \bigcup \beta \in \alpha L(\beta) = L(\alpha)$．

（ii）Mostowski の同型定理と ZFC におけるレーヴェンハイム・スコーレムの定理

ここで２つの定理を援用せねばならない．

クラス A が外延的であるとは任意の $x, y \in A$ に対し

$$\forall z (z \in A \rightarrow (z \in x \leftrightarrow z \in y)) \longrightarrow x = y$$

が成立つことである．

(ａ) **定理 (Mostowski's Collapsing Theorem)**

外延的クラス A に対し推移的クラス A' と $\in$ 同型双射 $\varphi : A \rightarrow A'$ が唯一つ存

在する．

$T\subseteq A$ が推移的なら π は T 上不変である．$x\in T\to\pi(x)=x$．$\in$同型写像とは $x\in y\to\pi(x)\in\pi(y)$ をみたす写像のことである．(「公集」V章§5 定理5.3)．

A,B が集合のとき $A\prec B$ (A は B の elementary substructure である) とは $A\subseteq B$ かつ任意の論理式 $\varphi(a_1,\ldots,a_n)$ に対し

$$v_0,\ldots,v_{n-1}\in A[\varphi_A(v_0,\ldots,v_{n-1})\longleftrightarrow\varphi_B(v_0,\ldots,v_{n-1}])]$$

が成立つことをいう．

（b）**ZFC における Löwenheim Skolem の定理**

A，B，X は集合として

$$\forall B\,\forall X\subseteq B\,\exists A[X\subseteq A\subseteq B\wedge A\prec B\wedge|A|=\max(\aleph_0,|X|)]$$

レーヴェンハイム・スコーレムの定理の証明と同様なことを ZFC 内で遂行して得られるので（「公集」V章§6，6.1，10°)．

（iii） **補題．** $V=L$ の仮定のもとで次が成立つ．

α は無限，$x\in L(\alpha)$，$y\subseteq x$ ならば$|\alpha|=|\xi|$となる ξ が存在して $y\in L(\xi)$．

［証明］ $x\in L(\alpha)$，α は無限，$y\subseteq x$ とする．$V=L$ の仮定のもとで 十分大きな極限数 θ が存在して $y\in L(\theta)$ となる．ZFC のレーヴェンハイム・スコーレムの定理により（$V=L$ だから AC がなりたつ)，$L(\alpha)\cup\{y\}\subseteq X\prec L(\theta)$ となる X で $|X|=|L(\alpha)\cup\{y\}|=|\alpha|$ となる X が存在する．$L(\theta)$ は推移的だから X も推移的，したがって外延的だから Mostowski の定理によってある推移的集合 Y と$\in$同型 $\pi:X\to Y$ が存在する．補題(ｉ)によって

$$L(\theta)\vDash\forall x\,\exists\beta(x\in L(\beta))\wedge L(\theta)\vDash\forall\beta\,\exists y(y=L(\beta))$$

だが，$X\prec L(\theta)$ だから

$$X\vDash\forall x\,\exists\beta(x\in L(\beta))\wedge X\vDash\forall\beta\,\exists y(y=L(\beta))$$

π は$\in$同型だから Y もこの条件をみたす．したがって(ｉ)によって極限数 ξ が存

在して $Y=L(\xi)$，$|Y|=|L(\xi)|=|\xi|$，$|Y|=|X|=|\alpha|$ だったから $|\xi|=|\alpha|$．$L(\alpha)$ は推移的で $x\in L(\alpha)$ だから $y\subseteq x\subseteq L(\alpha)$ であって $L(\alpha)\cup\{y\}$ も推移的である．したがって $L(\alpha)\cup\{y\}$ の上では π は不変である．ゆえに $L(\alpha)\cup\{y\}\subseteq Y$．したがって $y\in Y=L(\xi)$．　□

定理． $V=L\to GCH.$

［証明］ α を無限基数，β を α の次の基数（α^+）とする．

$\alpha\in L(\alpha+1)$．(iii) によって任意の $y\subseteq\alpha$ に対し $|\alpha+1|=|\alpha|=|\gamma|$ となる γ があって $y\in L(\gamma)$．この場合，$\gamma<\beta$ だから $y\in L(\beta)$，したがって $\mathbf{P}(\alpha)\subseteq L(\beta)$．したがって $|\mathbf{P}(\alpha)|\leq|L(\beta)|=|\beta|=\beta$.

一方カントールの定理によって $|\mathbf{P}(\alpha)|>|\alpha|=\alpha$ だから，$|\mathbf{P}(\alpha)|\geq\beta$ となる．したがって $|\mathrm{P}(\alpha)|=\beta$ となる．これは一般連続体仮説 GCH に他ならない．　□

系　Con[ZF] → Con[ZF + AC + GCH]．

文　　献

- P. J. Cohen, *Set theory and the Continuum hypothesis*, Benjamin, New York, (1966).
- コーヘン「連続体仮説」近藤，坂井，沢口訳，東京図書（1972）.
- K. Gödel, *The consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum hypothesis of Set theory*, Annals of Mathematical Studies, vol. 3, Princeton University Press, (1940).
- K. Kunnen, *Set theory*, An Introduction to Independence Proofs, North Holland Pub. Co., (1980).
- T. Jech, Set theory, Academic Press, (1978).
- 竹内外史「現代集合論入門」（増補版）日本評論社（1989）.

索　引

さ 行

た 行

な　行

は　行

ま　行

や　行

ら　行

わ 行

著者略歴

倉田令二朗（くらた　れいじろう）　**理学博士**

1931年　香川県丸亀市に生まれる
1954年　東京大学理学部数学科卒業
　　　　東京工業大学大学院・高校教師・日科技研電子
　　　　計算機センター・日本大学文理学部講師・
　　　　九州大学助手を経て
1964年　九州大学助教授
1986年　河合文化教育研究所主任研究員
著　書　『数学論序説』ダイヤモンド社
　　　　『数学概論』日本放送出版協会
　　　　『数学と物理学の交流』森北出版
　　　　『ガロアを読む』（第Ⅰ論文研究）日本評論社
　　　　『ガウス２次形式論(1)(2)』河合文化教育研究所
　　　　『ガロア方程式論(1)』河合文化教育研究所
　　　　『ガウス初等整数論』河合文化教育研究所
　　　　『ガウス円分方程式論』河合文化教育研究所
その他，論文・随筆多数

数学基礎論へのいざない　　**定価 1700 円**

1995年11月20日　第１刷発行

著者　倉　田　令二朗 ©
発行　河合文化教育研究所
〒464 名古屋市千種区今池2-1-10
TEL（052）735-1706
発売　㈱河 合 出 版
〒151 東京都渋谷区千駄ヶ谷5-1-6
TEL（03）3354-1481
〒464 名古屋市千種区今池2-1-10
TEL（052）735-1575
印刷 製本　㈱あ る む

ISBN 4-87999-965-2